

BAB II

DERET WAKTU

2.1 PROSES STOKASTIK DAN DERET WAKTU

Proses stokastik adalah barisan (koleksi) peubah acak yang dibangun berdasarkan indeks parameter. Indeks tersebut berkaitan dengan waktu yang dinotasikan dengan t , ruang yang dinotasikan dengan s dan waktu-ruang yang dinotasikan dengan (t,s) . Di dalam peubah acak itu sendiri dikenal istilah ruang keadaan, yaitu diskrit dan kontinu. Pada tugas akhir ini peubah acak dinotasikan sebagai Z dengan barisannya dibangun berdasarkan waktu.

Tabel 2.1 Jenis proses stokastik dan contohnya. Dalam hal ini dibagi menjadi empat bagian antara peubah acak diskrit dan kontinu dengan waktu diskrit dan kontinu.

Peubah Acak \ Waktu	Diskrit	Kontinu
Proses stokastik dengan parameter diskrit dinotasikan Z_t	Banyaknya pembeli saham Indosat selama 2020, Z_t bilangan bulat non negatif dan $Z_t \in \{0,1,2,3, \dots\}$ dengan $t = 1,2, \dots, 365$	Harga saham Indosat (dalam rupiah) dalam jangka waktu 2 bulan terakhir, Z_t bilangan riil dan $3.000 < Z_t < 6.500$ dengan $t = 1,2, \dots, 60$
Proses stoikastik dengan parameter kontinu dinotasikan $Z(t)$	Pergerakan harga saham Indosat yang terjadi pada 4 April 2021 dari pukul 20.00-22.00 $Z_t = \begin{cases} 1, & \text{harga saham naik} \\ -1, & \text{harga saham turun} \end{cases}$ dalam waktu $t \in [0,120)$ menit	Harga saham Indosat (dalam rupiah) yang terjadi pada 4 April 2021 dari pukul 20.00-22.00, Z_t bilangan riil dan $3.000 < Z_t < 6.500$ dengan $t \in [0,120)$ menit

Deret waktu adalah barisan peubah acak kontinu yang disusun berdasarkan waktu diskrit. Model untuk menjelaskan maksud dari deret waktu adalah:

$$Z_t = f(Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}) + \varepsilon_t \quad (2.1)$$

Keterangan :

$f(Z_{t-1})$: suatu nilai atau barisan nilai-nilai sebelumnya dengan galatnya

ε_t : galat

2.2 KONSEP STASIONERITAS

Kesimpulan statistik tentang struktur proses stokastik diambil dengan membuat beberapa asumsi. Asumsi yang paling penting adalah stasioneritas. Ide dasar dari stasioneritas adalah hukum probabilitas yang mengatur proses perilaku yang terjadi tidak berubah seiring waktu. Konsep kestasioneran menjelaskan bahwa tidak terdapat pengaruh antara waktu terhadap observasi dan struktur peluang tidak berubah terhadap waktu [1].

- i. Proses $\{Z_t\}$ dikatakan stasioner kuat jika [1]:

$F(Z_1, Z_2, \dots, Z_n) = F(Z_{1+k}, Z_{2+k}, \dots, Z_{n+k})$ untuk semua $t = 0, 1, 2, \dots, T$ dan lag k dengan $k = 1, 2, 3, \dots, T-1$.

- ii. Proses $\{Z_t\}$ dikatakan stasioner lemah tepat sampai pada momen kedua terpenuhi [1], yaitu :

- a. $E[Z_t] = \mu_t = \mu$, rata-rata konstan untuk semua waktu t

- b. $Var(Z_t) = \sigma_t^2 = \sigma^2$, variansi konstan untuk semua waktu t

$Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_{k,t-k} = \gamma_k$, bergantung pada lag k

Jenis stasioneritas dalam deret waktu terdiri dari dua jenis, yaitu stasioner dalam rata-rata dan stasioner dalam variansi. Stasioner dalam rata-rata adalah fluktuasi data berada di sekitar nilai rata-rata yang konstan tidak bergantung pada waktu. Sedangkan stasioner dalam variansi adalah apabila struktur data dari waktu ke waktu mempunyai fluktuasi yang tetap atau konstan dan tidak berubah-ubah. Waktu terjadinya pengamatan tidak memberikan pengaruh terhadap struktur peluang barisan peubah acak. Secara visual, fluktuasi data tersebut digambarkan melalui plot deret waktu [9].

Beberapa notasi yang digunakan dalam tulisan ini yaitu [1] :

$$\rho_k = Corr(Z_t, Z_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\gamma_0 = Var(Z_t) = Cov(Z_t, Z_t) \quad \rho_0 = 1$$

$$\gamma_k = \gamma_{-k}$$

$$\rho_k = \rho_{-k}$$

$$|\gamma_k| \leq \gamma_0$$

$$|\rho_k| \leq 1$$

2.3 FUNGSI OTOKORELASI

Fungsi otokorelasi disingkat ACF, adalah fungsi yang mengukur korelasi pasangan deret waktu Z_t dengan Z_{t+k} yang dipisahkan oleh waktu lag k [9]. Saat mengambil contoh lag $k = 2$ maka Z_t akan dikorelasikan dengan Z_{t+2} , artinya data pertama akan dikorelasikan dengan data ketiga begitu seterusnya menyesuaikan lag k . ACF biasanya digunakan untuk mengidentifikasi model deret waktu dan melihat kestasioneran data dalam rata-rata. Berikut ini bentuk ACF [10]:

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(Z_t, Z_{t-k})}{\sqrt{\text{Var}(Z_t)\text{Var}(Z_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.2)$$

Dengan $\gamma_k = \text{Cov}(Z_t, Z_{t-k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t-k} - \mu)]$ dan $\gamma_0 = E[(Z_t - \mu)^2]$

Jika terdapat pengamatan $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ sebanyak n data maka estimasi otokorelasi untuk k lag adalah sebagai berikut:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2}, k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\bar{Z} = \sum_{t=1}^n \frac{Z_t}{n}$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2}{n}$$

2.4 FUNGSI OTOKORELASI PARSIAL

Fungsi otokorelasi parsial disingkat PACF, adalah fungsi yang mengamati hubungan yang ada antara peubah acak Z_t dengan menghilangkan pengaruh di antara interval peubah acak tersebut [9]. Berikut ini sampel PACF dengan notasi ϕ_{kk} :

$$\hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}_k - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}_j} \quad (2.3)$$

Menghitung $\hat{\phi}_{kk}$ menggunakan metode rekursif dimulai dari:

$$\hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}_1$$

$$\hat{\phi}_{k+1,k+1} = \frac{\hat{\rho}_{k+1} - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \hat{\rho}_{k+1-j}}{1 - \sum_{j=1}^k \hat{\phi}_{kj} \hat{\rho}_j}$$

$$\hat{\phi}_{k+1,j} = \hat{\phi}_{kj} - \hat{\phi}_{k+1,k+1} \hat{\phi}_{k,k+1-j}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

2.5 MODEL AR

Model stasioner AR(p) adalah bentuk regresi antara peubah acak Z_t dengan dirinya sendiri. Variabel acak Z_t dinyatakan sebagai kombinasi linear dari variabel acak $Z_t, Z_{t-1}, \dots, Z_{t-p}$ ditambah dengan galat murni (*white noise*). Berikut ini adalah Persamaan AR(p):

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Hal tersebut dapat diartikan bahwa AR(p) meregresikan Z_t ke dirinya sejauh p lag ke belakang atau $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$, lihat Persamaan 2.4. Model AR(p) merupakan model stasioner dengan galat atau ε_t merupakan *white noise* yang tidak berkorelasi, memiliki rata-rata nol dan berdistribusi identik.

Asumsi-asumsi yang berlaku sebagai berikut:

1. ε_t saling bebas terhadap $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-p}$.
2. Data stasioner.
3. Galat berdistribusi normal.

2.6 MODEL AR(1)

Bentuk persamaan model AR(1) sebagai berikut [10] :

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5)$$

Hal tersebut dapat diartikan bahwa AR (1) meregresikan Z_t ke dirinya sendiri sejauh 1 lag ke belakang atau Z_{t-1} , lihat Persamaan 2.5. Model AR(1) menggunakan batas $p = 1$ dengan nilai parameter ϕ_1 yang dapat dihasilkan pada nilai PACF sehingga terlihat letak keadaan *cut-off* pada AR(1).

Selanjutnya untuk mempelajari rata-rata dari Z_t dapat menggunakan ruas kanan Persamaan 2.5 dengan menghitung ekspektasinya sebagai berikut :

$E[\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + e_t] = E[\phi_0] + E[\phi_1 Z_{t-1}] + E[\varepsilon_t]$, karena sifat distributif dari ekspektasi terhadap penjumlahan

Mengingat :

- a. $E[\phi_0] = \phi_0$, dalam model Persamaan 2.5 ϕ_0 adalah suatu konstanta.
- b. $E[\phi_1 Z_{t-1}] = \phi_1 E[Z_{t-1}]$, ini berasal dari konsep kestasioneran bagian
 - ii.(a) $E[Z_{t-1}] = \mu_{t-1} = \mu$ sehingga diperoleh $E[\phi_1 Z_{t-1}] = \phi_1 \mu_t = \phi_1 \mu$.
- c. $E[\varepsilon_t] = 0$, galat dalam hal ini merupakan *white noise* dengan rata-rata nol.

Berdasarkan keterangan di atas diperoleh persamaan rata-rata pada AR(1) sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E[Z_t] &= \phi_0 + \phi_1 E[Z_{t-1}] + E[\varepsilon_t] \\
 \mu_t &= \phi_0 + \phi_1 \mu + 0 \\
 \mu &= \phi_0 + \mu \phi_1, \text{ karena } E[Z_t] = \mu_t = \mu \\
 \phi_0 &= \mu - \mu \phi_1 \\
 \phi_0 &= \mu(1 - \phi_1) \\
 \mu &= \frac{\phi_0}{(1 - \phi_1)} \\
 \phi_0 &= \mu(1 - \phi_1)
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Berbeda untuk variansi (Z_t), ruas kanan dari Persamaan 2.5 harus diubah menjadi barisan tak hingga dari galat $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$. Hal ini dilakukan karena AR(1) memiliki sifat invertibilitas dengan MA(∞) atau dalam artian bentuk AR(1) dapat diubah menjadi bentuk MA(∞).

$$\begin{aligned}
 Z_{t-1} &= \phi_0 + \phi_1 Z_{t-2} + \varepsilon_{t-1} \text{ atau untuk } t-2, t-3, \dots \\
 Z_{t-m} &= \phi_0 + \phi_1 Z_{t-m-1} + \varepsilon_{t-m} \\
 Z_{t-2} &= \phi_0 + \phi_1 Z_{t-3} + \varepsilon_{t-2} \\
 Z_{t-3} &= \phi_0 + \phi_1 Z_{t-4} + \varepsilon_{t-3}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian ruas kanan dari Persamaan 2.5 menjadi :

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t \\
 Z_t &= \phi_0 + \phi_1(\phi_0 + \phi_1 Z_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t \\
 Z_t &= \phi_0 + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Dari ruas kanan sejajar Persamaan 2.7 dapat dihitung variansinya sebagai berikut :

$$Var(Z_t) = Var(\phi_0 + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \dots)$$

Mengingat :

- Sifat $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$ menyebabkan $Var(a) = 0$ dan $Var(bX) = b^2 Var(X)$ dengan a dan b adalah konstanta, sehingga diperoleh $Var(\phi_0) = 0$ dan $Var(\phi_1 \varepsilon_{t-1}) = \phi_1^2 Var(\varepsilon_{t-1})$.
- $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, galat dalam hal ini merupakan *white noise* dengan variansi sebesar σ_ε^2 .
- $Var(Z_t) = Cov(Z_t, Z_t) = \gamma_0$, dijelaskan dalam sifat variansi.

Berdasarkan keterangan di atas diperoleh persamaan variansi pada AR(1) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} Var(Z_t) &= Var(\varepsilon_t) + \phi_1^2 Var(\varepsilon_{t-1}) + \phi_1^4 Var(\varepsilon_{t-2}) + \\ &\quad \phi_1^6 Var(\varepsilon_{t-3}) + \dots \\ Var(Z_t) &= \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^4 \sigma_\varepsilon^2 + \phi_1^6 \sigma_\varepsilon^2 + \dots \\ Var(Z_t) &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Penyelesaian Persamaan sejajar 2.8 dapat menggunakan deret geometri tak hingga dengan $a = \sigma_\varepsilon^2$ dan $r = \phi_1^2$, diperoleh sebagai berikut :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \quad (2.9)$$

Syarat AR(1) stasioner jika $\phi_1^2 < 1$ atau $|\phi_1| < 1$, [2] :

- Jika $0 < \phi_1 < 1$, semua korelasi positif dengan grafik menurun membentuk pola eksponensial menuju nol
- Jika $-1 < \phi_1 < 0$, otokorelasi lag 1 bertanda negatif dengan pola ganti tanda

Otokovariansi model AR(1) dapat diperoleh dengan cara melakukan perkalian persamaannya dengan Z_{t-k} terlebih dahulu. Hal ini dilakukan karena untuk menentukan otokovariansi dapat menggunakan konsep kestasioneran bagian ii.(b), yaitu otokovariansi antara dua data pengamatan hanya bergantung pada lag k . Hasil perkalian Persamaan AR(1) dengan Z_{t-k} sebagai berikut :

$$Z_t Z_{t-k} = (\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t) Z_{t-k}$$

Otokovariansi dari model AR(1) dapat diperoleh dengan cara berikut ini :

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-k}) &= Cov((\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t) Z_{t-k}) \\ &= \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k}) \end{aligned}$$

Mengingat :

- $Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k$ berdasarkan sifat bahwa kovariansi antara dua data pengamatan bergantung pada lag k.
- $Cov((\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \varepsilon_t) Z_{t-k}) = \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k})$, berdasarkan sifat $Cov(aX + bY + c, Z) = a Cov(X, Z) + b Cov(Y, Z)$, ϕ_0 dan ϕ_1 merupakan konstanta dan Z_{t-k} dan ε_t merupakan peubah acak.
- $Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k}) = 0$, dikarenakan galat dan Z_{t-k} saling bebas.

$$k = 1, Cov(Z_t, Z_{t-1}) = \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-1}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-1})$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 = \phi_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

$$k = 2, Cov(Z_t, Z_{t-2}) = \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-2}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-2})$$

$$\gamma_2 = \phi_1 \gamma_1 = \phi_1 \left(\phi_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \right) = \phi_1^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

$$k = 3, Cov(Z_t, Z_{t-3}) = \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-3}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-3})$$

$$\gamma_3 = \phi_1 \gamma_2 = \phi_1 \left(\phi_1^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2} \right) = \phi_1^3 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}$$

Secara umum otokovariansi AR(1) diperoleh sebagai berikut :

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}, k = 0 \\ \phi_1^k \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2}, k \geq 1 \end{cases}$$

Diperoleh :

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2} = \gamma_0, k = 0 \\ \phi_1^k \gamma_0, k \geq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

Otokorelasi atau ACF secara umum dapat dihitung dengan membagi otokovariansi pada lag k dengan variansinya seperti dijelaskan dalam Persamaan 2.2, yaitu :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$k = 0, \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$k = 1, \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}} = \phi_1$$

$$k = 2, \rho_2 = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi_1^2}} = \phi_1^2$$

Secara umum otokorelasi AR (1) diperoleh sebagai berikut :

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \phi^k, & k \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Otokorelasi parsial atau PACF dapat dihitung dengan menggunakan bentuk Persamaan 2.3 sehingga diperoleh :

$$k = 1,$$

$$\phi_{11} = \frac{\rho_1 - \phi_{01}\rho_0}{1 - \phi_{01}\rho_1} = \rho_1 = \phi_1$$

$$k = 2,$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1 - \phi_{11}\rho_1} = \frac{\phi_1^2 - \phi_1^2}{1 - \phi_1^2} = 0$$

$$k = 3,$$

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \phi_{21}\rho_2 - \phi_{22}\rho_1}{1 - \phi_{21}\rho_1 - \phi_{22}\rho_2} = \frac{\phi_1^3 - \phi_1\phi_1^2 - 0(\phi_1)}{1 - \phi_1\phi_1 - 0(\phi_1^2)} = 0$$

Perhatikan bahwa :

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11} = \phi_{11} - 0(\phi_{11}) = \phi_{11} = \phi_1$$

Secara umum otokorelasi parsial AR(1) diperoleh sebagai berikut :

$$\phi_{k,k} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases} \quad (2.12)$$

2.7 MODEL AR(2)

Model AR(2) dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$Z_t = \phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t \quad (2.13)$$

Dengan kata lain AR(2) meregresikan Z_t ke dirinya sejauh 2 lag ke belakang atau Z_{t-2} , lihat Persamaan 2.13. Selanjutnya untuk mempelajari rata-rata dari Z_t , kita dapat memanfaatkan ruas kanan dari Persamaan 2.13 dan menghitung ekspektasinya:

$$E[\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t] = E[\phi_0 + E[\phi_1 Z_{t-1} + E[\phi_2 Z_{t-2} + E[\varepsilon_t]],$$

karena sifat distributif dari ekspektasi terhadap penjumlahan

Mengingat :

- $E[\phi_0] = \phi_0$, dalam model di atas ϕ_0 adalah suatu konstanta.
- $E[\phi_1 Z_{t-1}] = \phi_1 E[Z_{t-1}]$ dan $E[\phi_2 Z_{t-2}] = \phi_2 E[Z_{t-2}]$, ini berasal dari konsep kestasioneran bagian ii.(a) $E[Z_{t-1}] = \mu_{t-1} = \mu$ dan $E[Z_{t-2}] = \mu_{t-2} = \mu$ sehingga diperoleh $\phi_1 E[Z_{t-1}] = \phi_1 \mu$ dan $\phi_2 E[Z_{t-2}] = \phi_2 \mu$.
- $E[\varepsilon_t] = 0$, galat dalam hal ini merupakan *white noise* dengan rata-rata nol.

Berdasarkan keterangan di atas diperoleh Persamaan rata-rata pada AR(2) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= E(\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) \\ \mu_t &= \phi_0 + \phi_1 E(Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-2}) + E(\varepsilon_t) \\ \mu &= \phi_0 + \phi_1 \mu + \phi_2 \mu + 0 \\ \phi_0 &= \mu - \mu \phi_1 - \mu \phi_2 \\ \phi_0 &= \mu(1 - \phi_1 - \phi_2) \\ \mu &= \frac{\phi_0}{(1 - \phi_1 - \phi_2)} \\ \phi_0 &= \mu(1 - \phi_1 - \phi_2) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Berbeda untuk variansi (Z_t), jika dalam AR(1) dapat menggunakan sifat invertibilitas maka untuk AR(2) dapat menggunakan bentuk karakteristiknya dari ruas kanan Persamaan 2.13 secara langsung. Hal ini disebabkan model AR(2) tidak invertibilitas terhadap bentuk MA(∞) sehingga dalam pengolahannya berbeda dengan AR(1), diperoleh sebagai berikut:

$$Var(Z_t) = Var(\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t)$$

Mengingat :

- $Var(X + Y + Z) = Var(X) + Var(Y) + Var(Z) + 2 Cov(XY) + 2 Cov(XZ) + 2 Cov(YZ)$

b. $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

Maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 Var(Z_t) &= Var(\phi_1 Z_{t-1}) + Var(\phi_2 Z_{t-2}) + Var(\varepsilon_t) + 2 Cov(\phi_0 \phi_1 Z_{t-1}) \\
 &\quad + 2 Cov(\phi_0 \phi_2 Z_{t-2}) + 2 Cov(\phi_0 \varepsilon_t) + 2 Cov(\phi_1 Z_{t-1} \phi_2 Z_{t-2}) \\
 &\quad + 2 Cov(\phi_1 Z_{t-1} \varepsilon_t) + 2 Cov(\phi_2 Z_{t-2} \varepsilon_t) \\
 Var(Z_t) &= \phi_1^2 Var(Z_{t-1}) + \phi_2^2 Var(Z_{t-2}) + Var(e_t) + 2\phi_1 \phi_2 Cov(Z_{t-1} Z_{t-2}) \\
 \gamma_0 &= \phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2^2 \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 \\
 \gamma_0 &= (\phi_1^2 + \phi_2^2) \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan langkah yang sama pada AR(1), otokovariansi model AR(2) dapat diperoleh dengan cara melakukan perkalian Persamaan 2.13 dengan Z_{t-k} terlebih dahulu, yaitu :

$$Z_t Z_{t-k} = (\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) Z_{t-k} \tag{2.16}$$

Otokovariansi dari model AR(2) dapat diperoleh dengan cara berikut ini :

$$\begin{aligned}
 Cov(Z_t, Z_{t-k}) &= Cov((\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t) Z_{t-k}) \\
 Cov(Z_t, Z_{t-k}) &= Cov(\phi_0, Z_{t-k}) + \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-k}) + \phi_2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-k}) \\
 &\quad + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k})
 \end{aligned}$$

Mengingat :

- $Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k$ berdasarkan sifat bahwa kovariansi antara dua data pengamatan bergantung pada lag k.
- $Cov((\phi_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + e_t) Z_{t-k}) = Cov(Z_{t-1}, Z_{t-k}) + \phi_2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-k}) + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k})$, berdasarkan sifat $Cov(aX + bY + c, Z) = a Cov(X, Z) + b Cov(Y, Z)$, ϕ_0 dan ϕ_1 merupakan konstanta sedangkan Z_{t-k} dan ε_t merupakan peubah acak.
- $Cov(\varepsilon_t, Z_{t-k}) = 0$, dikarenakan galat dan Z_{t-k} saling bebas.

$k = 1$

$$\begin{aligned}
 Cov(Z_t, Z_{t-1}) &= Cov(\phi_0, Z_{t-1}) + \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-1}) + \phi_2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-1}) \\
 &\quad + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-1}) \\
 \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1
 \end{aligned}$$

k = 2,

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-2}) &= Cov(\phi_0, Z_{t-2}) + \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-2}) + \phi_2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-2}) \\ &\quad + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-2}) \\ \gamma_2 &= \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0 \end{aligned}$$

k = 3,

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_{t-3}) &= Cov(\phi_0, Z_{t-3}) + \phi_1 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-3}) + \phi_2 Cov(Z_{t-2}, Z_{t-3}) \\ &\quad + Cov(\varepsilon_t, Z_{t-3}) \\ \gamma_3 &= \phi_1 \gamma_2 + \phi_2 \gamma_1 \end{aligned}$$

Secara umum otokovariansi AR(2) diperoleh sebagai berikut :

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2}, \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Saat k = 1 maka diperoleh persamaan otokovariansi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 \\ \gamma_1 - \phi_2 \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 \\ (1 - \phi_2) \gamma_1 &= \phi_1 \gamma_0 \\ \gamma_1 &= \frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Kemudian gunakan pada Persamaan 2.15 dan Persamaan 2.18 sehingga akan didapatkan bentuk persamaan baru variansi sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= (\phi_1^2 + \phi_2^2) \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \gamma_1 + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 &= (\phi_1^2 + \phi_2^2) \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 \left(\frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2} \right) + \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 &= \frac{(1 - \phi_2)(\phi_1^2 + \phi_2^2) \gamma_0 + 2\phi_1 \phi_2 (\phi_1 \gamma_0) + (1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_2)} \\ (1 - \phi_2) \gamma_0 &= (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_1^2 \phi_2 - \phi_2^3) \gamma_0 + 2\phi_1^2 \phi_2 \gamma_0 + (1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2 \\ (1 - \phi_2) \gamma_0 - (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_1^2 \phi_2 - \phi_2^3) \gamma_0 - 2\phi_1^2 \phi_2 \gamma_0 &= (1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 \left((1 - \phi_2) - (\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_1^2 \phi_2 - \phi_2^3) - 2\phi_2 \phi_1^2 \right) &= (1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 ((1 - \phi_2)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) - 2\phi_2 \phi_1^2) &= (1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_0 &= \frac{(1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2}{(1 - \phi_2)(1 - \phi_1^2 - \phi_2^2) - 2\phi_2 \phi_1^2} \\ \gamma_0 &= \frac{(1 - \phi_2) \sigma_\varepsilon^2}{(1 + \phi_2)((1 - \phi_2)^2 - \phi_1^2)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Syarat AR(2) stasioner jika :

1. $\phi_1 + \phi_2 < 1$
2. $\phi_2 - \phi_1 < 1$
3. $|\phi_2| < 1$

Otokorelasi atau ACF dari model AR(2) dapat dihitung menggunakan Persamaan 2.2 sehingga diperoleh:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$k = 0, \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$k = 1, \rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}}{\gamma_0} = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

$$\begin{aligned} k = 2, \rho_2 &= \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \left(\frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\frac{(\phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2 (1 - \phi_2) \gamma_0)}{1 - \phi_2}}{\gamma_0} \\ &= \frac{\gamma_0 (\phi_1^2 + \phi_2 (1 - \phi_2))}{1 - \phi_2} \cdot \frac{1}{\gamma_0} = \frac{\phi_2 (1 - \phi_2) + \phi_1^2}{1 - \phi_2} = \frac{\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_1^2}{1 - \phi_2} \\ &= \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} = \phi_1 \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} + \phi_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 3, \rho_3 &= \frac{\gamma_3}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_2 + \phi_2 \gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 (\phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_0) + \phi_2 \left(\frac{\phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2} \right)}{\gamma_0} \\ &= \frac{\phi_1 \left(\frac{(\phi_1^2 \gamma_0 + \phi_2 (1 - \phi_2) \gamma_0)}{1 - \phi_2} \right) + \frac{\phi_2 \phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}}{\gamma_0} \\ &= \frac{\frac{\phi_1^3 \gamma_0 + \phi_1 \phi_2 (1 - \phi_2) \gamma_0 + \phi_2 \phi_1 \gamma_0}{1 - \phi_2}}{\gamma_0} \\ &= \frac{\gamma_0 (\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2 (1 - \phi_2) + \phi_2 \phi_1)}{1 - \phi_2} \cdot \frac{1}{\gamma_0} \\ &= \frac{\gamma_0 (\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2 (1 - \phi_2) + \phi_2 \phi_1)}{1 - \phi_2} \cdot \frac{1}{\gamma_0} \\ &= \frac{(\phi_1^3 + \phi_1 \phi_2 (1 - \phi_2) + \phi_2 \phi_1)}{1 - \phi_2} \\ &= \frac{\phi_1^3 - \phi_1 \phi_2^2}{1 - \phi_2} = \phi_1 \left(\frac{\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_1^2}{1 - \phi_2} \right) + \phi_2 \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right) \\ &= \phi_1 \rho_2 + \phi_2 \rho_1 \end{aligned}$$

Secara umum otokorelasi AR (2) diperoleh sebagai berikut :

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

Otokorelasi parsial atau PACF dapat dihitung dengan menggunakan bentuk Persamaan 2.5 sehingga diperoleh :

k = 1,

$$\phi_{11} = \frac{\rho_1 - \phi_{01}\rho_0}{1 - \phi_{01}\rho_1} = \rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$$

k = 2,

$$\begin{aligned} \phi_{22} &= \frac{\rho_2 - \phi_{11}\rho_1}{1 - \phi_{11}\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{(\phi_1\rho_1 + \phi_2) - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \\ &= \frac{\phi_1 \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right) + \phi_2 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right)^2}{1 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right)^2} = \frac{\frac{\phi_1^2 - \phi_1^2\phi_2 + (1-\phi_2)^2\phi_2 - \phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}}{\frac{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2}{(1-\phi_2)^2}} \\ &= \frac{\phi_2((1-\phi_2)^2 - \phi_1^2)}{(1-\phi_2)^2} \frac{(1-\phi_2)^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1^2} = \phi_2 \end{aligned}$$

k = 3,

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \phi_{21}\rho_2 - \phi_{22}\rho_1}{1 - \phi_{21}\rho_1 - \phi_{22}\rho_2} = \frac{(\phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1) - \phi_1\rho_2 - \phi_2\rho_1}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2} = 0$$

Perhatikan berikut:

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11} = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2} - \phi_2 \left(\frac{\phi_1}{1 - \phi_2} \right) = \frac{\phi_1(1 - \phi_2)}{1 - \phi_2} = \phi_1$$

Secara umum otokorelasi parsial AR (2) diperoleh sebagai berikut :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, k = 1 \\ \phi_2, k = 2 \\ 0, k > 2 \end{cases} \quad (2.21)$$

2.8 TAHAPAN BOX-JENKINS

Data deret waktu dalam dimodelkan menggunakan Tahapan Box-Jenkins. Tahapan ini dikenalkan dan dikembangkan oleh G.E.P Box dan G.M Jenkins pada

tahun 1960-an dengan tidak mengabaikan kaidah-kaidah deret waktu dalam penggunaannya. Tiga tahapan dalam Box-Jenkins dijelaskan sebagai berikut:

A. IDENTIFIKASI MODEL

Tahap pertama yang dilakukan adalah mengidentifikasi model melalui kestasioneran data yang digunakan serta ACF dan PACF. Jika telah memenuhi ketentuan pada Tabel 2.2 maka data tersebut telah memenuhi kestasioneran dan bisa diduga model sementara [9].

Tabel 2.2 Karakteristik ACF dan PACF untuk menentukan model. Dugaan model sementara bisa dilakukan dengan melihat plotnya [9].

Model	ACF	PACF
AR(p)	Menurun menuju nol secara eksponensial	Terpotong setelah lag p
MA(q)	Terpotong setelah lag q	Menurun menuju nol secara eksponensial
ARMA(p,q)	Menurun menuju nol secara eksponensial	Menurun menuju nol secara eksponensial

Dalam penjelasannya banyak sekali yang digunakan untuk merepresentasikan makna dari kalimat “terpotong setelah lag”. Hal ini dikarenakan dalam menduga model perlu dilakukan uji kebaikannya, sehingga model di sekitarnya yang mendekati masih bisa diajukan. Kriteria tersebut akan terpenuhi jika pada plot terlihat salah satu pola di bawah ini :

1. Di atas batas interval maksimum sampai lag ke-p (untuk ACF) atau q (untuk PACF) dan di bawah batas pada lag>p (untuk ACF) atau lag>q (untuk PACF)
2. Perubahan nilai parameter terlihat signifikan yaitu menjadi nol atau mendekati nol dengan cepat setelah lag ke-p (untuk ACF) atau lag ke-q (untuk PACF)

B. ESTIMASI PARAMETER

Selanjutnya dilakukan tahap estimasi parameter dari kandidat-kandidat model pada tahap identifikasi model. Terdapat beberapa cara yang bisa digunakan,

seperti metode Momen, *Maximum Like-Lihood*, dan metode *Least Square*. Pada tugas akhir ini dipilih Metode *Least Square*. Metode *Least Square* atau kuadrat terkecil adalah suatu bentuk analisis regresi matematis yang menemukan garis yang paling sesuai untuk kumpulan data.

Metode kuadrat terkecil merupakan metode berupa data deret berkala yang mana membutuhkan data-data dimasa lampau untuk melakukan peramalan dimasa mendatang sehingga dapat ditentukan hasilnya. Ciri dari metode ini, yaitu dalam menentukan parameter X. Setelah parameter X terbentuk dan dijumlah, jumlahnya harus 0, walaupun dalam data historis berjumlah ganjil maupun data historis berjumlah genap. Oleh sebab itu terdapat dua pembagian data yang digunakan :

- a. Data genap, memiliki skor nilai t: ..., ..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ..., ...
- b. Data ganjil, memiliki skor nilai t: ..., ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., ...

Bentuk Persamaannya ialah : $Y = a + b X$

$$a = \frac{\sum Y}{n}$$

$$b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$

Mengingat : n = banyaknya data

Y = Variabel data tahun ke-n

X = Variabel data periode tahun ke-n

C. UJI DIAGNOSA MODEL

Tahapan ketiga dari metode Box-Jenkins adalah melakukan diagnosa model. Tahapan ini sangat penting dilakukan untuk mengetahui kecukupan atau kelayakan model. Uji tersebut menggunakan nilai residual atau galat yang diperoleh dari selisih antara data aktual dan data prediksi. Tentunya untuk mengetahui model terbaik dari galat harus memenuhi asumsi berdistribusi normal dan membentuk sebaran data yang acak. Hal tersebut dijelaskan lebih lanjut sebagai berikut :

a. Plot galat stasioner

Tahapan yang pertama kali dilakukan adalah membentuk plot galat, yang harus menunjukkan stasioner dengan rata-rata nol dan variansinya konstan. Biasanya data yang stasioner jika dimodelkan akan menghasilkan galat yang stasioner juga, selain itu uji ini hanya dilihat secara visual. Oleh sebab itu perlu dilakukan uji diagnosa yang lain.

b. Galat tidak berkorelasi

Setelah plot galat memenuhi stasioner maka selanjutnya dilakukan uji korelasi antar galat yaitu dengan melihat plot otokorelasi. Setiap lag yang tidak melebihi batas signifikansi menunjukkan tidak terdapat korelasi antar lagnya dan persebarannya yang acak.

c. Galat berdistribusi normal

Pada dua tahapan sebelumnya dapat dilihat secara visual, namun kali ini dilakukan uji hipotesis yang menunjukkan bahwa galat berdistribusi normal. H_0 merupakan dugaan galat berdistribusi normal, dengan nilai p harus lebih besar dari α yang digunakan agar H_0 diterima.

d. Memenuhi kecukupan model

Terakhir ialah melakukan pengujian keindependenan galat dengan Ljung-box test yaitu dengan statistik uji Q dan daerah penolakan distribusi chi-square. H_0 merupakan dugaan tidak adanya korelasi pada galatnya, dengan nilai p harus lebih besar dari α yang digunakan agar H_0 diterima.

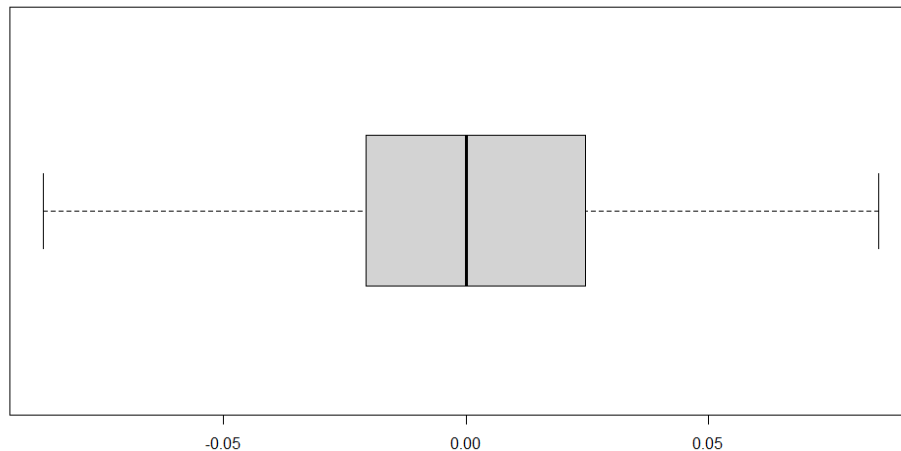
2.9 SIMULASI MODEL AR(1) DAN AR(2)

Simulasi model AR (1) dan AR(2) dilakukan dengan menggunakan data galat yang telah dibangkitkan dari sampel acak berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi 0,04. Tugas akhir ini menggunakan lima kali percobaan membangkitkan galat dengan bantuan perangkat lunak R. Selanjutnya dilakukan simulasi model AR(1) dan AR(2) untuk masing-masing galat. Hasil simulasi menunjukkan bahwa galat yang dibangkitkan dengan bantuan perangkat lunak R lebih berdistribusi normal. Data acak yang dibangkitkan lebih baik menggunakan perangkat lunak R karena Excel lebih biasa digunakan untuk perhitungan yang konsepnya lebih sederhana. Dari hasil galat tersebut, dipilih simulasi dengan

menggunakan galat percobaan kedua dari perangkat lunak R yang menunjukkan nilai p terbesar berdasarkan uji normalitas dengan Shapiro-Wilk. Daftar galat yang digunakan dari data bangkitan terdapat dalam Lampiran A.

Tabel 2.3 Statistika Deskriptif galat yang menunjukkan bahwa galat berdistribusi normal

Rata-rata	-0,00017
Minimum	-0,08874
Maksimum	0,084567
Range	0,173307
Skewness	-0,05799
Kurtosis	0,046102
Standar Deviasi	0,037421
Median	-0,00081
Kuartil 1	-0.0208323
Kuartil 3	0.0845668



Gambar 2.1 Diagram kotak-garis galat yang dibangkitkan dari distribusi normal menunjukkan persebaran galat yang hampir seimbang

Diagram kotak-garis Gambar 2.1 menunjukkan bahwa persebaran data galat berdistribusi normal. Selanjutnya dilakukan uji normalitas galat dengan Shapiro-Wilk yang menghasilkan nilai p sebesar 0,6174. Berdasarkan taraf signifikansi $\alpha < 61,74\%$ maka dapat disimpulkan bahwa hipotesis H_0 yang menyatakan galat

berdistribusi normal, **diterima**. Dengan kata lain galat mengikuti distribusi normal untuk sembarang nilai taraf signifikansi. Galat memenuhi asumsi kenormalan diperjelas dalam statistika deskriptif sebagai berikut :

1. Data galat yang digunakan memiliki nilai minimum yaitu -0,08874 dan maksimum yaitu 0,084567 dengan nilai rata-rata -0,00017.
2. Batas kuartil 1 terletak pada $[(-0,08874), (-0,0208323)]$ dengan kata lain sekitar 25% dari total keseluruhan data persebarannya terletak pada selang tersebut. Sementara nilai rata-rata lebih besar dari median/kuartil 2, dengan batas kuartil 2 yaitu $[(-0,08874), (-0,00081)]$ yang menjelaskan bahwa 50% dari total keseluruhan data persebarannya berada di bawah rata-rata. sedangkan untuk kuartil 3 atau 75% dari total keseluruhan data persebarannya berada di $[(-0,08874), (0,0845668)]$.
3. Kemiringan distribusi galat dapat dilihat dalam skewness yang bernilai negatif yaitu -0,05799 artinya kurva cenderung menjulur ke kiri.
4. Keruncingan distribusi galatnya dapat dilihat pada nilai kurtosis yang menunjukkan kurang dari 3 dan bernilai positif, sehingga dapat disimpulkan bahwa kurva cenderung datar dan puncaknya tidak terlalu tinggi.

Setelah asumsi normalitas data terpenuhi, maka selanjutnya kestasioneran data juga harus terpenuhi. Masing-masing simulasi model AR dilakukan dengan menggunakan parameter yang memenuhi syarat stasionernya. Parameter terpilih bersama galat yang telah dibangkitkan kemudian digunakan untuk membentuk data bangkitan, dinotasikan dengan Z_t . Dengan menggunakan Microsoft Excel dapat dihitung besar dari nilai lag pada ACF dan PACF dari Z_t . Pada akhirnya simulasi ini dilakukan untuk menyimpulkan seperti apa pengaruh yang diberikan oleh parameter terhadap plot Z_t , ACF dan PACF.

A. SIMULASI MODEL AR(1)

Model AR(1) memenuhi syarat stasioner jika $\phi_1 < 1$. Dalam simulasi ini dipilih nilai parameter yang berbeda-beda yaitu $\phi_1 =$

$-0,92; -0,75; -0,49; -0,25; 0,25; 0,49; 0,75; 0,92$ yang memenuhi syarat untuk menentukan model awal yang digunakan.

IDENTIFIKASI MODEL

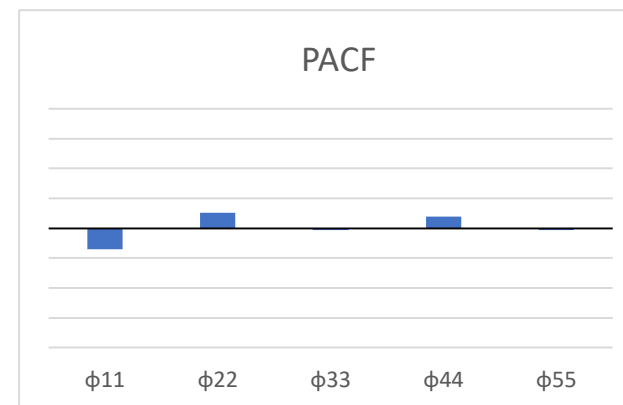
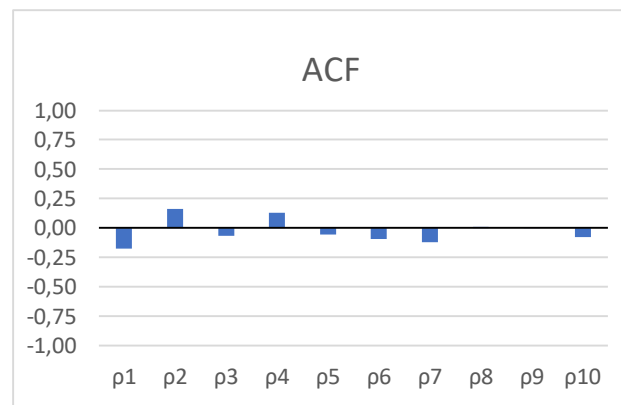
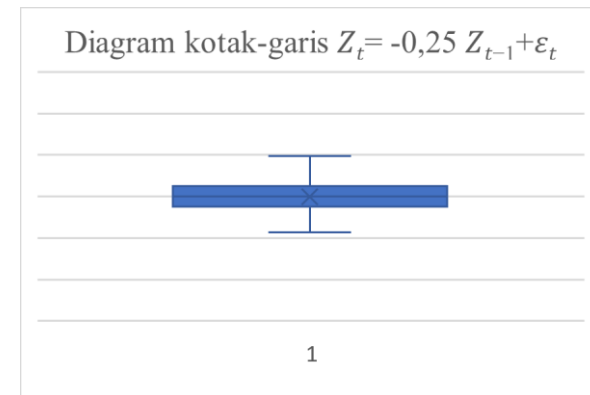
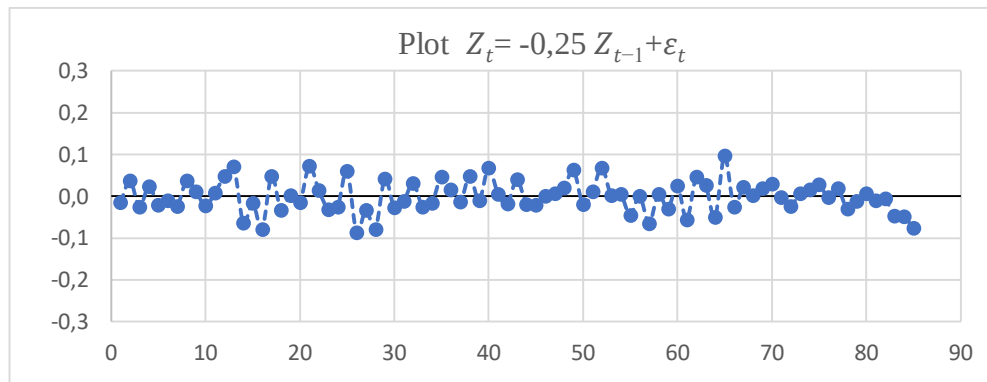
Berikut ini plot deret waktu, diagram kotak-garis, ACF dan PACF hasil simulasi model AR(1) yang dilakukan sebanyak delapan kali percobaan parameter yang berbeda :

1. Pada percobaan yang dilakukan dengan menggunakan $\phi_1 = -0,25$ dan $0,25$, terlihat bahwa plot deret waktu Z_t lebih rapat yang menunjukkan stasioner terhadap rata-rata dan variansi. Pada $\phi_1 = -0,49$ dan $0,49$ plot mulai lebih besar fluktuasinya namun rata-rata dan variansi masih konstan. Kemudian $\phi_1 = -0,75; -0,92; -0,75$ dan $0,92$ menunjukkan peningkatan variansi yang cukup besar sehingga menyebabkan plot mulai lebih terlihat ada kenaikan dan penurunan nilai serta sangat melebar dalam variansinya.
2. Pada ϕ_1 negatif perpindahan nilai dari positif ke negatif terlihat jelas sedangkan ϕ_1 positif menunjukkan peningkatan dan penurunan nilai sangat signifikan. Hasil plot yang dilakukan menunjukkan bahwa nilai parameter sangat berpengaruh terhadap plot deret waktu yang terbentuk. Keadaan parameter yang bernilai negatif maupun positif akan menghasilkan plot deret waktu yang semakin stasioner terhadap rata-rata dan variansi jika ϕ_1 menjauhi batas stasioner yaitu 1. Sedangkan saat ϕ_1 mendekati 1 maka plot akan terlihat sangat berfluktuasi dan datanya juga lebih besar nilainya.
3. Diagram kotak-garis memperkuat penjelasan plot deret waktu yang ada. Saat $\phi_1 = -0,25$ dan $0,25$ luasan diagram kotak-garis sangatlah kecil. Sementara untuk $\phi_1 = -0,49; -0,75$ dan $-0,92$ luasan diagram kotak-garis mengalami peningkatan secara terus menerus begitupun yang terjadi pada $\phi_1 = 0,49; 0,75$ dan $0,92$. Hal ini berarti dengan nilai parameter negatif maupun positif menghasilkan diagram kotak-garis yang mana semakin menjauhi nol nilai parameternya maka semakin besar persebaran variansinya sehingga diagram kotak-garis menunjukkan luasannya yang meningkat.
4. Pada saat $\phi_1 = -0,25; -0,49; -0,75; -0,92$ menunjukkan bahwa plot ACF menuju nol dengan pola yang menunjukkan adanya pergantian tanda. Semakin jauh nilai nol nilai parameternya maka besarnya ACF pada

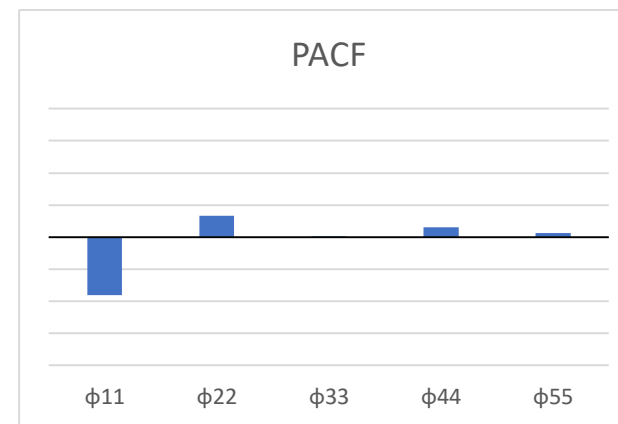
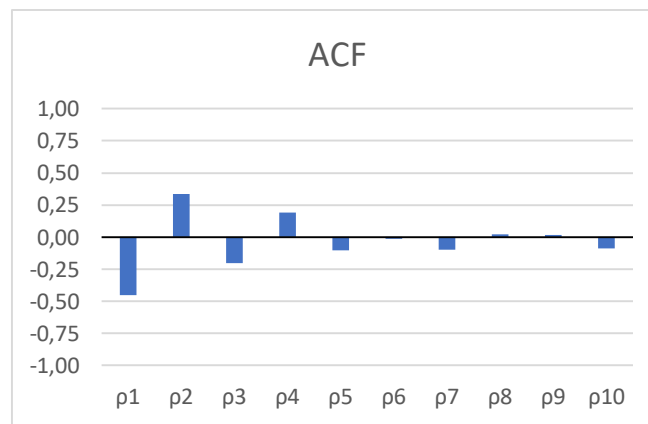
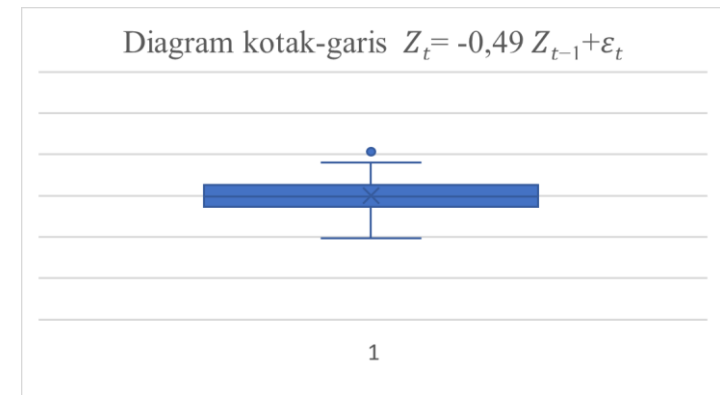
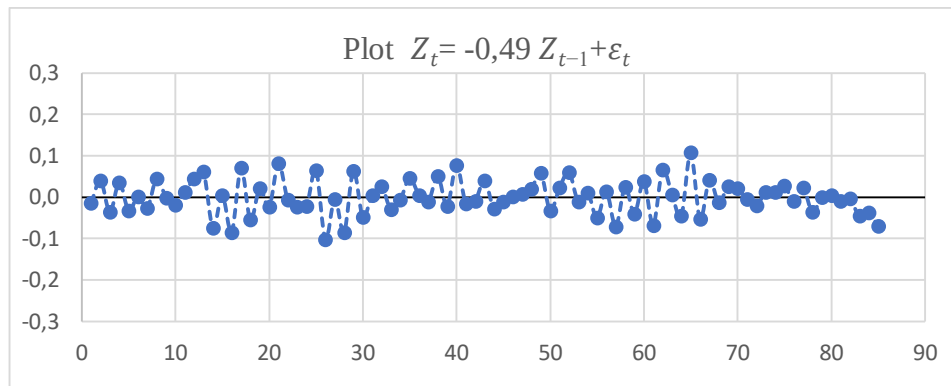
masing-masing lag lebih terlihat jelas dengan nilai yang lebih besar. Sedangkan pada $\phi_1 = 0,25; 0,49; 0,75; 0,92$ plot ACF yang diperoleh ialah membentuk pola seperti gelombang sinus menuju nol. Dalam hal ini semakin menjauhi nol nilai parameternya maka semakin melambat pola ACF nya saat menurun menuju nol.

5. Sedangkan plot PACF pada $\phi_1 = -0,25; -0,49; -0,75; -0,92$ menunjukkan bahwa lag pertama bernilai hampir sama dengan nilai parameternya, dengan lag selanjutnya menuju nol bahkan hampir bernilai nol. Begitupun yang terjadi pada saat nilai parameternya positif yaitu $\phi_1 = 0,25; 0,49; 0,75; 0,92$. Pada lag pertama nilainya sama dengan parameter yang diberikan diawal, namun bisa saja hanya mendekati nilai parameternya. Hal ini disebabkan oleh adanya nilai eror yang muncul pada masing-masing model sehingga nilainya mempengaruhi plot PACF nya.

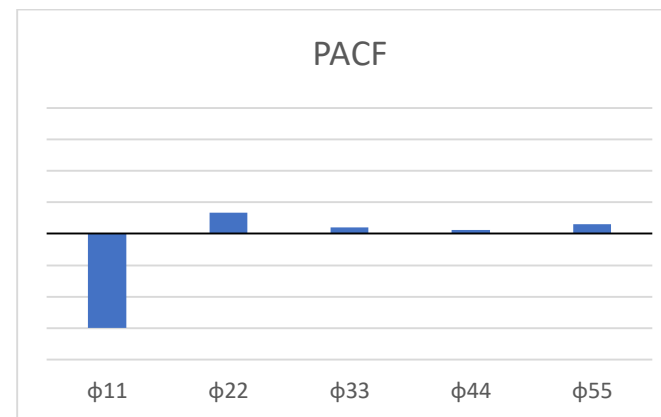
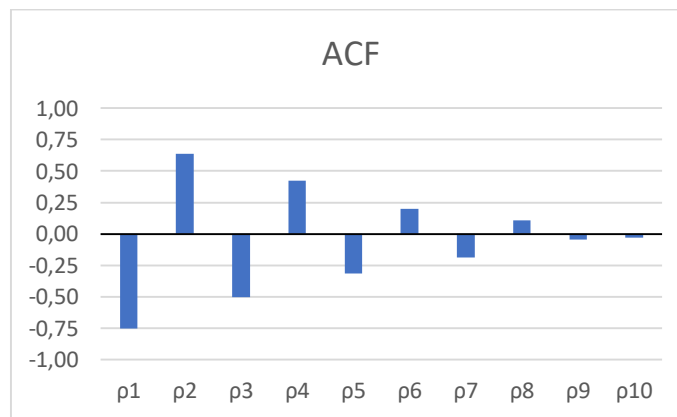
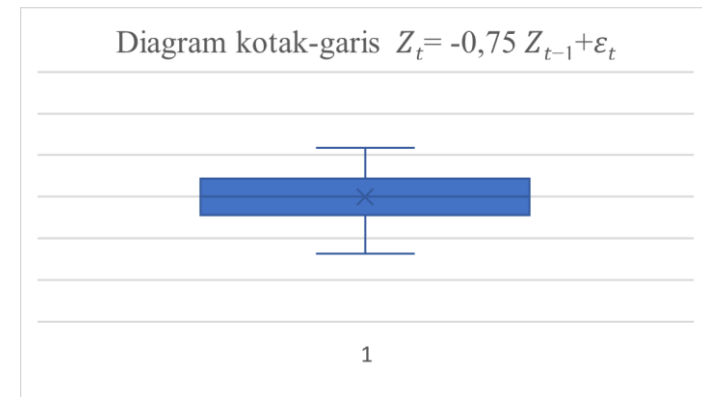
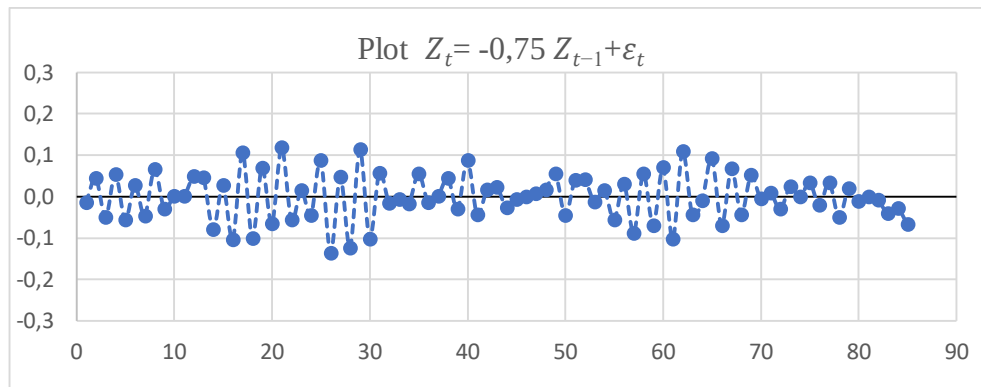
Berdasarkan hal tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa semakin menjauhi nol nilai parameternya, maka plot data yang diperoleh menunjukkan semakin berfluktuasi (variabilitas datanya semakin besar). Hal ini dikarenakan adanya syarat kestasioneran yang mana diketahui $-1 < \phi_1 < 1$, sehingga saat nilai parameternya mendekati batas stasioner maka datanya akan sangat bergejolak mengalami kenaikan dan penurunan nilai. Selain itu, bersesuaian juga dengan nilai ACF dan PACF yang diperoleh. Semakin nilai parameternya mendekati batas stasioner maka semakin besar nilai masing-masing lag ACF dan PACF nya.



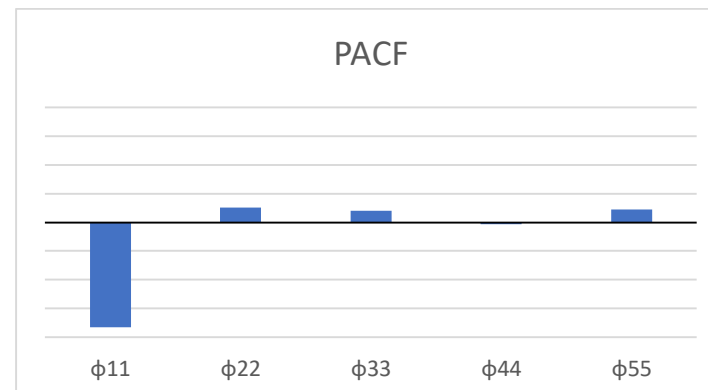
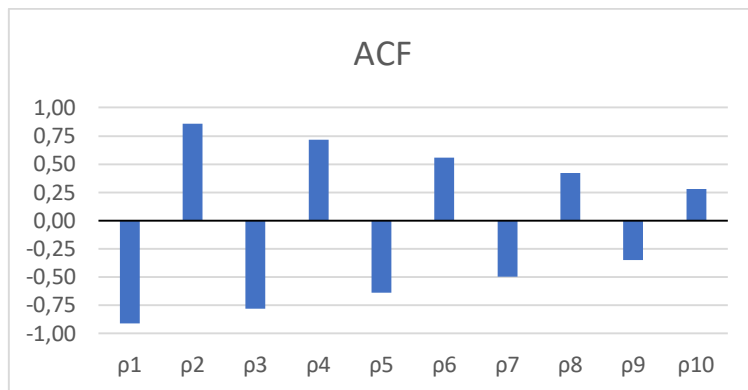
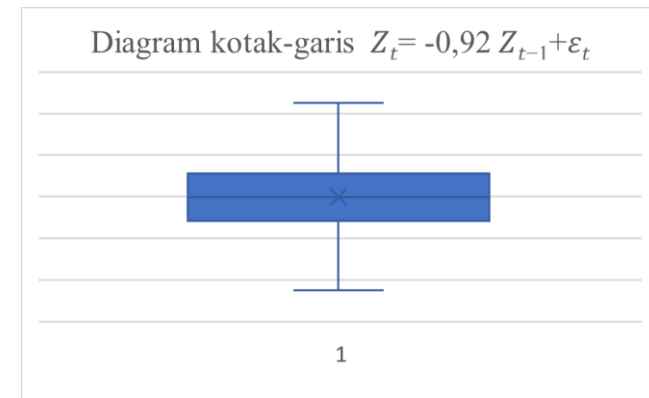
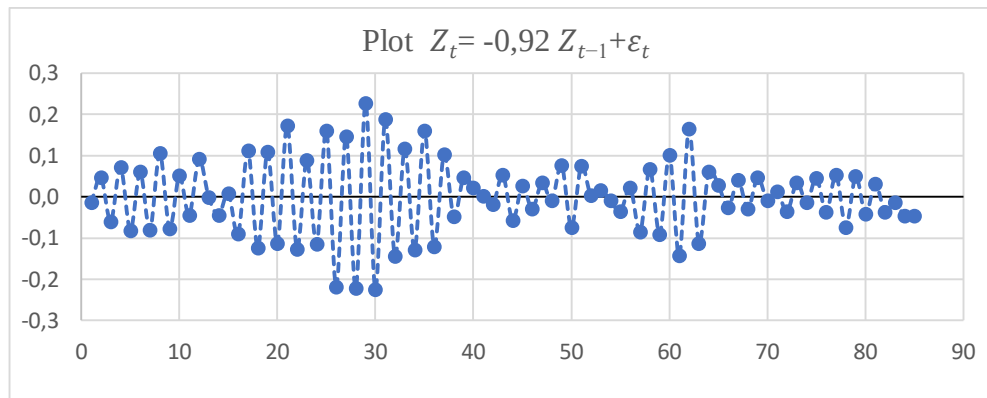
Gambar 2.2.a Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,25 Z_{t-1} + \epsilon_t$. Terlihat plot deret waktu stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tampak seimbang pada diagram kotak-baris. Sementara ACF berpola menuju nol dan berganti tanda, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan menuju nol untuk lag selanjutnya.



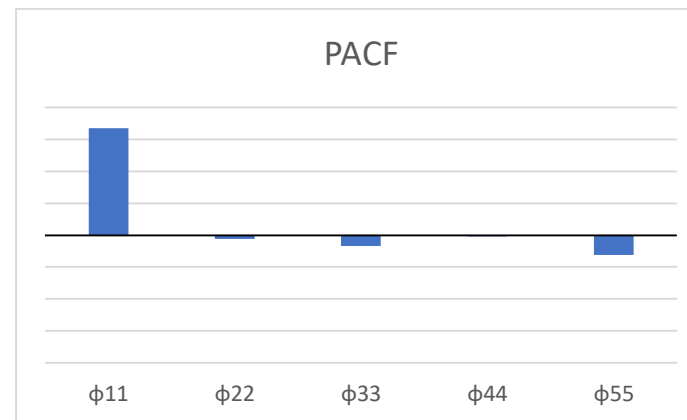
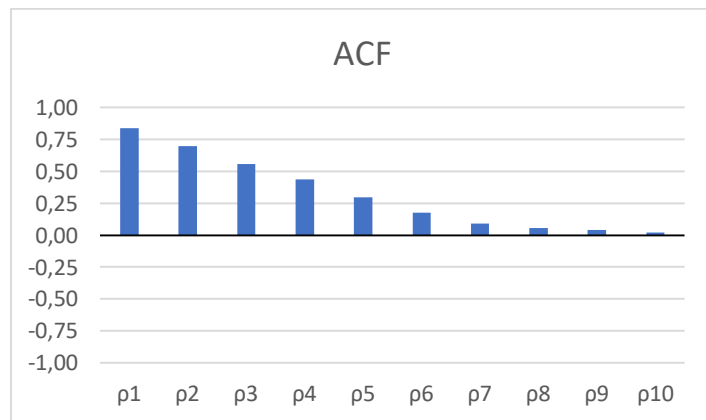
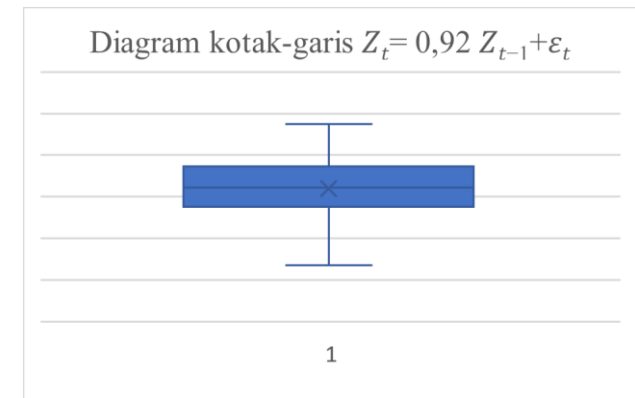
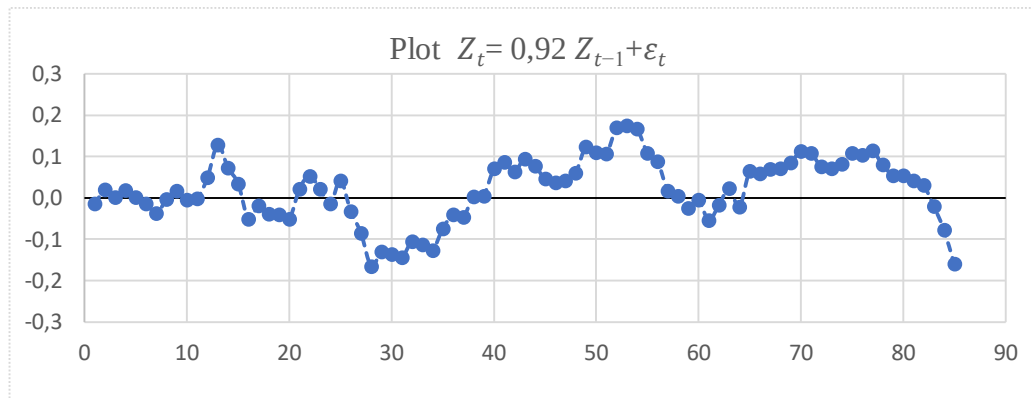
Gambar 2.2.b Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,49 Z_{t-1} + \epsilon_t$. Terlihat plot deret waktu memiliki rata-rata dan variansi yang stasioner, dengan distribusinya yang tidak seimbang pada diagram kotak-baris serta adanya pencilan. Sementara ACF berpola menuju nol berganti tanda, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan menuju nol.



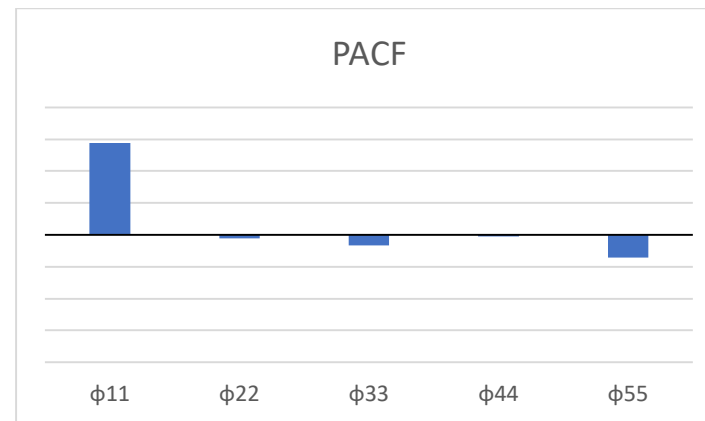
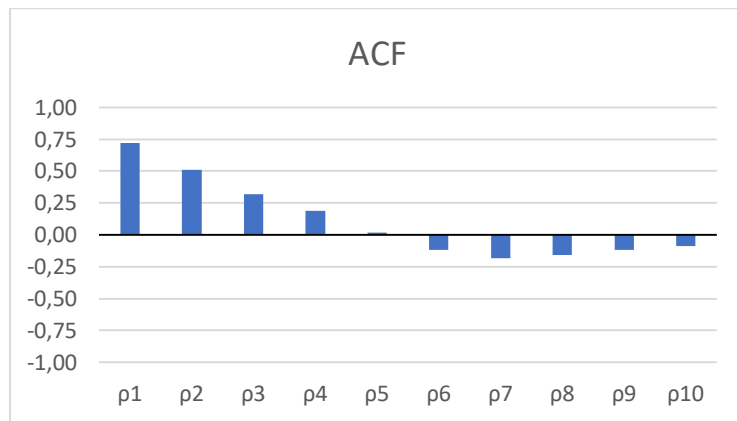
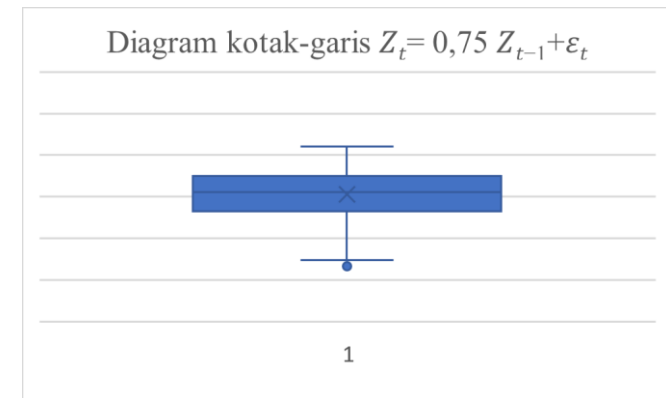
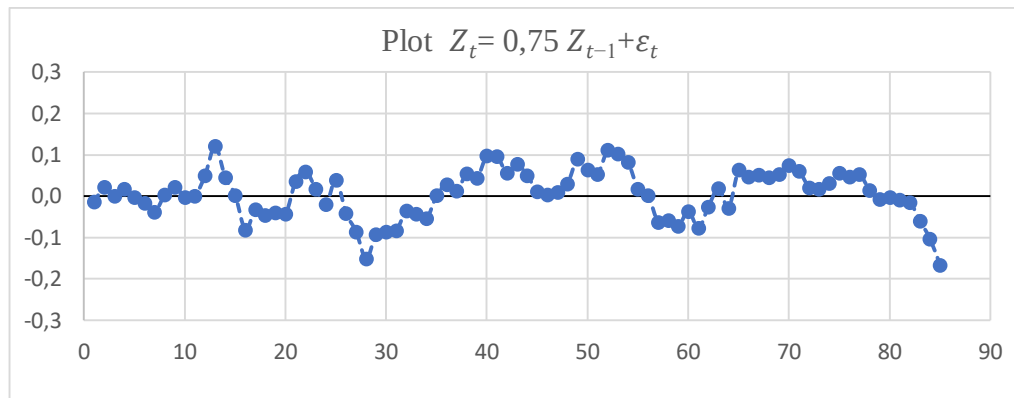
Gambar 2.2.c Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,75Z_{t-1} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu menunjukkan mulai tidak stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya masih seimbang. Sementara ACF berpola menuju nol berganti tanda, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan hampir sama dengan nol untuk lag selanjutnya.



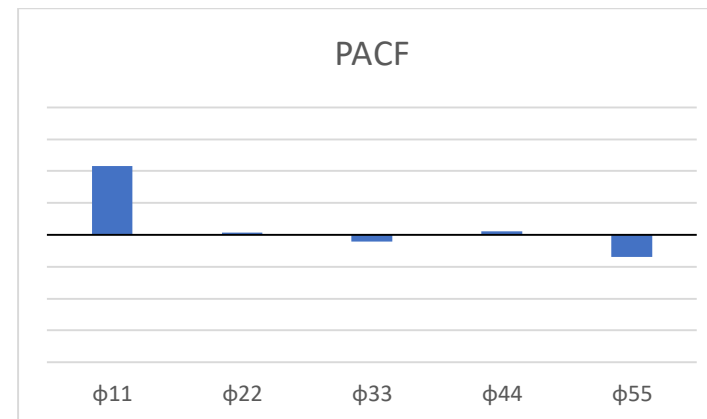
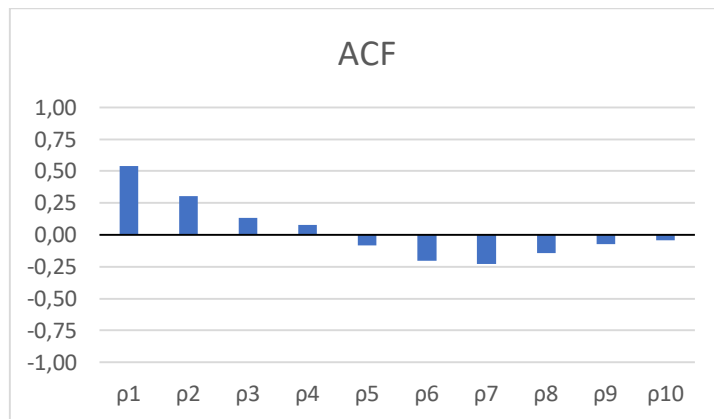
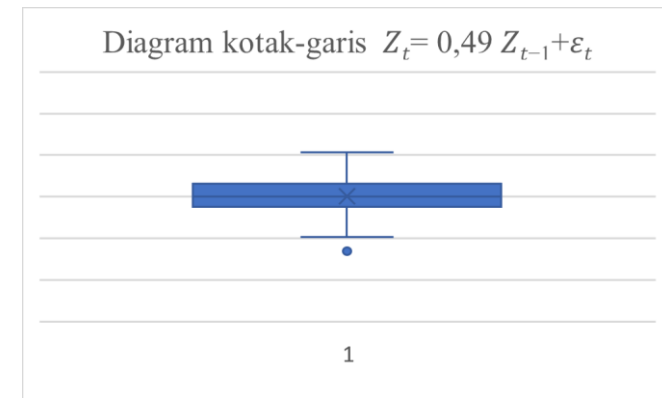
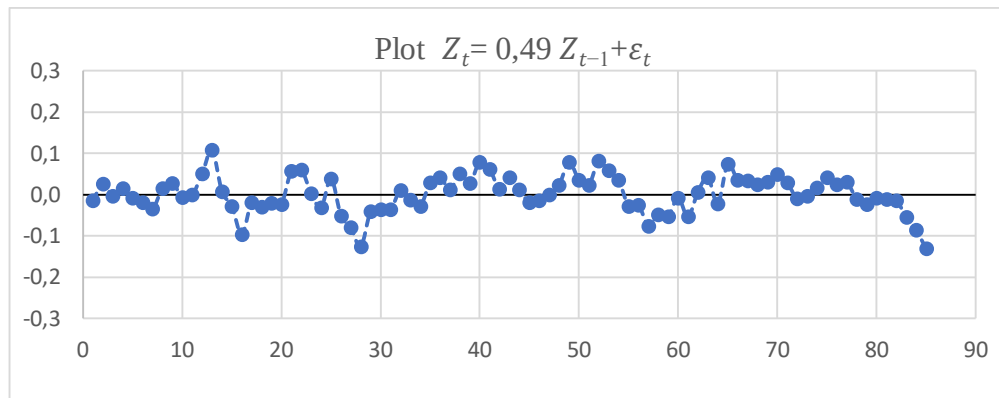
Gambar 2.2.d Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,92Z_{t-1} + \epsilon_t$. Terlihat plot deret waktu sangat acak tidak menunjukkan stasioner terhadap rata-rata dan variansi, dengan distribusinya seimbang pada diagram kotak-baris. Sementara ACF berpola menuju nol dan berganti tanda, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan menuju nol pada lag selanjutnya.



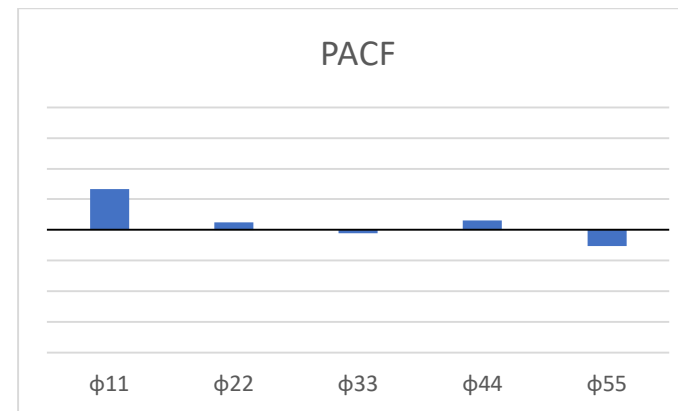
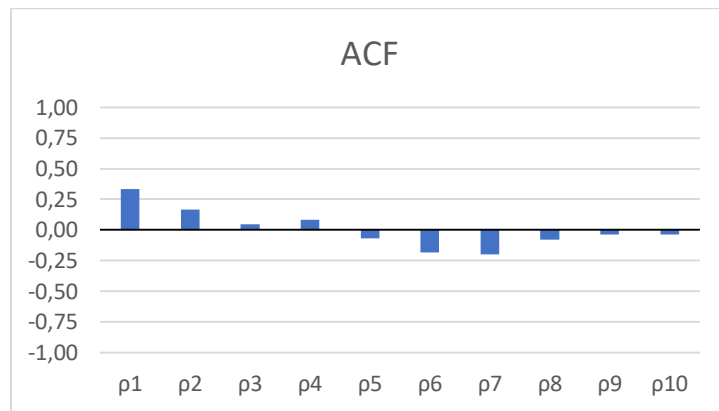
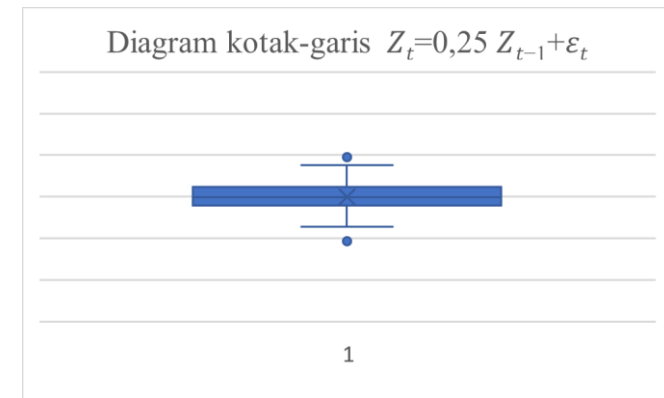
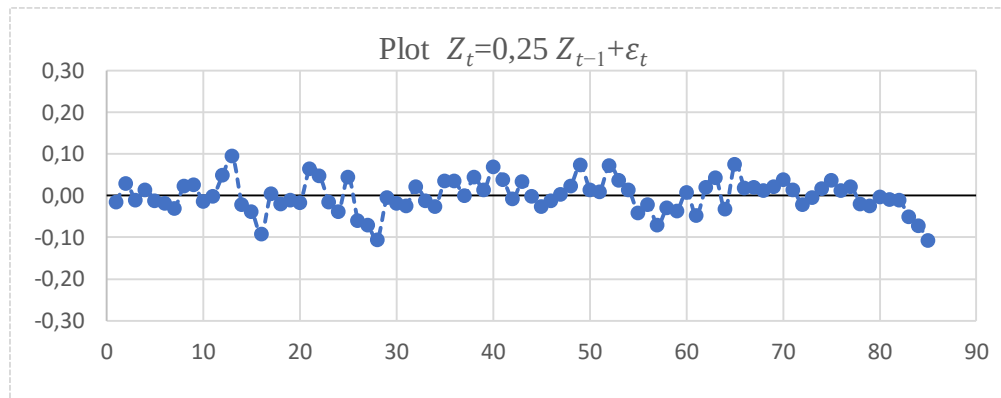
Gambar 2.2.e Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,92 Z_{t-1} + \epsilon_t$. Plot deret waktu sangat acak dan tidak menunjukkan stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya tidak seimbang pada diagram kotak-baris. Sementara ACF berpola menurun menuju nol dari nilai positif, sedangkan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan menuju nol.



Gambar 2.2.f Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,75Z_{t-1} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu tidak menunjukkan stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tidak seimbang pada diagram kotak-baris dan terdapat penculan. Sementara ACF berpola menurun menuju nol membentuk gelombang sinus, sedangkan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan menuju nol secara drastis untuk lag selanjutnya.



Gambar 2.2.g Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,49Z_{t-1} + \epsilon_t$. Terlihat plot deret waktu mulai menunjukkan stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya seimbang pada diagram kotak-baris namun ada pencilan. Sementara ACF berpola menurun menuju nol dengan membentuk gelombang sinus, sedangkan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan menuju nol untuk lag selanjutnya.



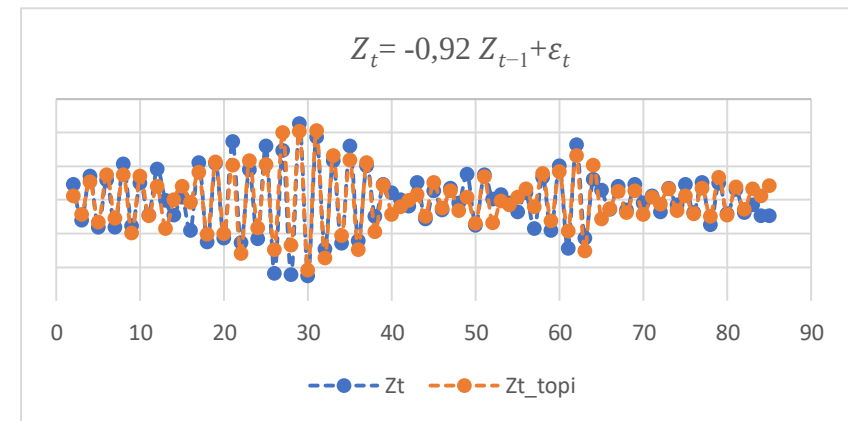
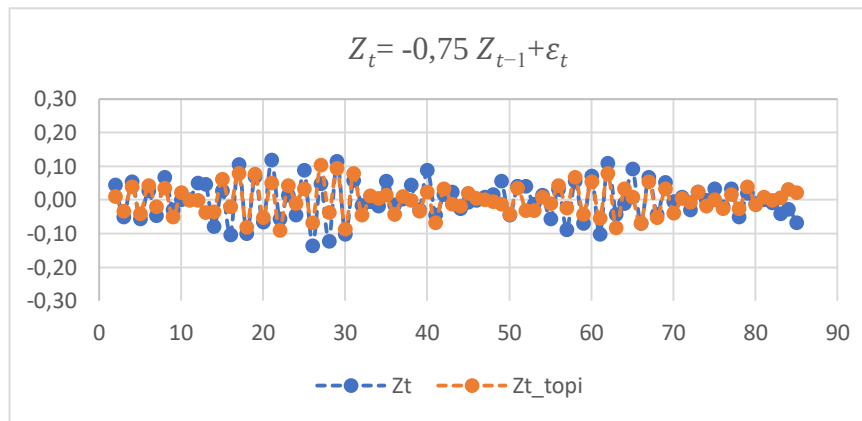
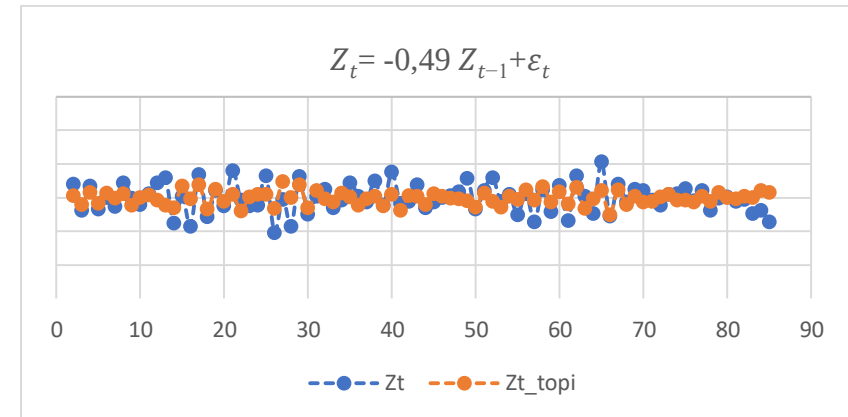
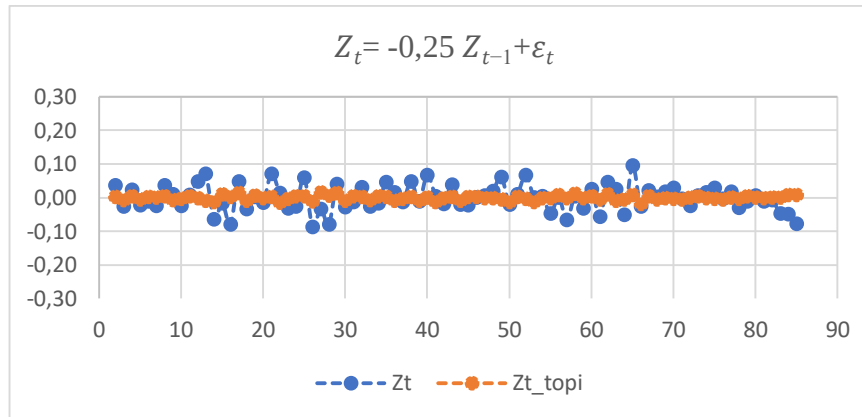
Gambar 2.2.h Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,25Z_{t-1} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu lebih stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya seimbang pada diagram kotak-baris namun ada pencilan. Sementara ACF berpola menurun menuju nol dan membentuk gelombang sinus, sedangkan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan menuju nol untuk lag selanjutnya.

ESTIMASI PARAMETER

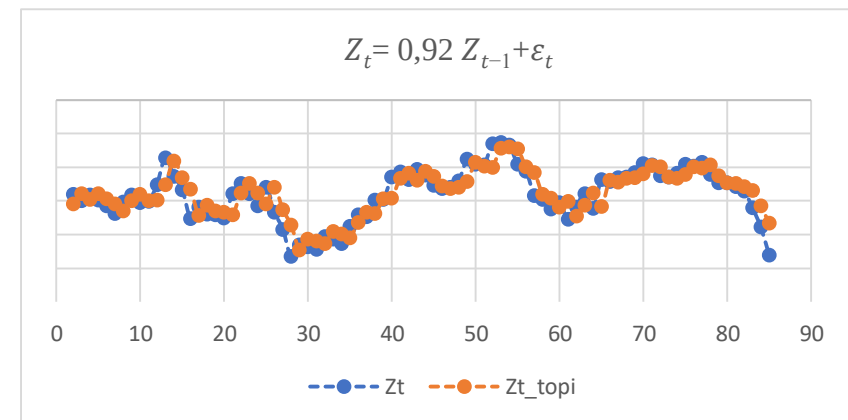
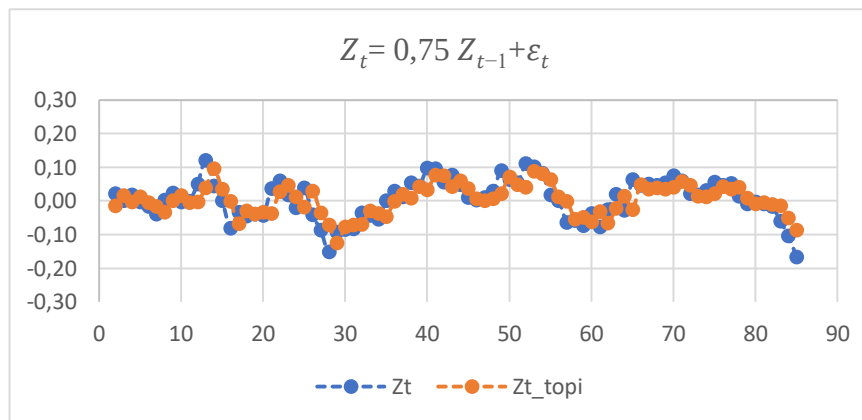
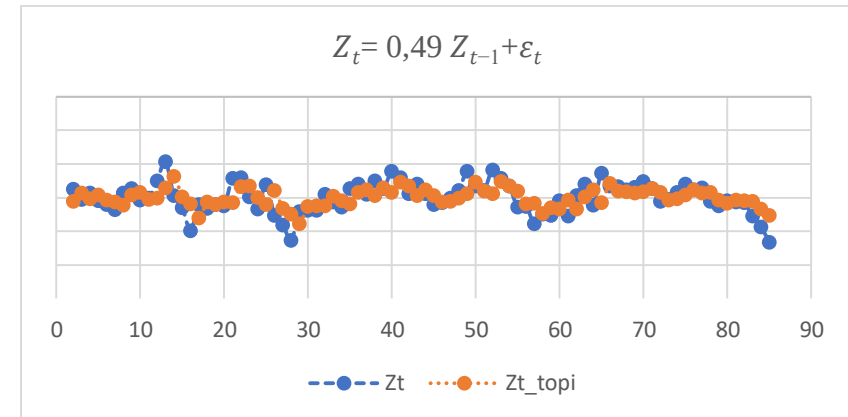
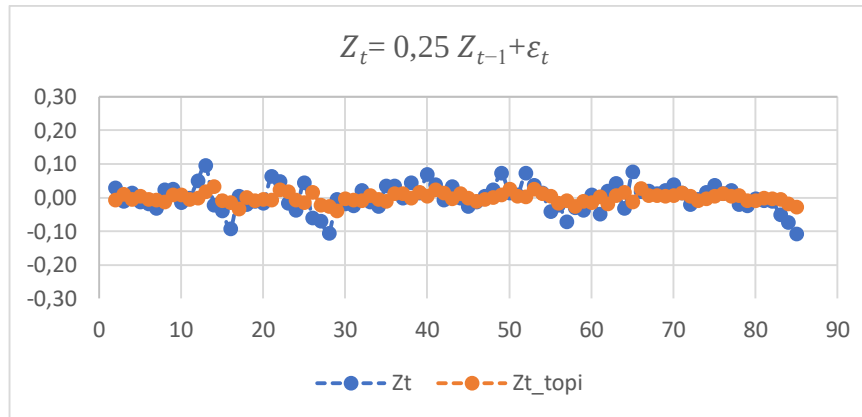
Tabel 2.4 Estimasi Parameter simulasi AR(1) yang menggunakan model Z_t

Model	Parameter				Model	
	Parameter awal		Hasil estimasi		Awal = Z_t	$\hat{Z}_t$
1	ϕ_0	0	ϕ_0	0,00002	$Z_t = -0,25 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = 0,00002 - 0,1831 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-0,25	ϕ_1	-0,1831		
2	ϕ_0	0	ϕ_0	0,00001	$Z_t = -0,49 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = 0,00001 - 0,468 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-49	ϕ_1	-0,468		
3	ϕ_0	0	ϕ_0	0,00002	$Z_t = -0,75 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = 0,00002 - 0,762 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-0,75	ϕ_1	-0,762		
4	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,00002	$Z_t = -0,92 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,00002 - 0,917 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-0,92	ϕ_1	-0,917		
5	ϕ_0	0	ϕ_0	0,00026	$Z_t = 0,25 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = 0,00026 + 0,365 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,25	ϕ_1	0,365		
6	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,00076	$Z_t = 0,49 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,00076 + 0,6001 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,49	ϕ_1	0,6001		
7	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,00231	$Z_t = 0,75 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,00231 + 0,809 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,75	ϕ_1	0,809		
8	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,00406	$Z_t = 0,92 Z_{t-1} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,00406 + 0,901 Z_{t-1} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,92	ϕ_1	0,901		

Pemodelan awal membentuk Z_t dengan parameter yang telah ditentukan dan galat yang dibangkitkan. Kemudian dilakukan estimasi parameter Z_t pada masing-masing model untuk membentuk nilai prediksi dari Z_t , ditulis dengan $\hat{Z}_t$. Estimasi parameter masing-masing $\hat{Z}_t$ diperoleh nilai ϕ_0 yang mendekati yaitu sebesar 0,00002; 0,00001; 0,00002; -0,00002; 0,00406; -0,00231; -0,00076; dan -0,00026. Sementara parameter $\phi_1 = -0,25; -0,49; -0,75; -0,92; 0,92; 0,75; 0,49; 0,25$ menghasilkan estimasi yang mendekati juga dengan nilai parameter aslinya yaitu $\phi_1 = -0,1831; -0,468; -0,762; -0,917; 0,901; 0,809; 0,599; 0,364$. Hasil tersebut memang tidak sama persis nilainya, ada yang lebih besar dan lebih kecil. Hal ini berarti bahwa data prediksi yang dihasilkan dipengaruhi juga dengan galatnya sehingga nilai parameternya berbeda. Namun ini juga menunjukkan bahwa plot ACF dan PACF yang terbentuk dalam simulasi bisa menggambarkan nilai parameter lainnya yang mendekati parameter awal dalam percobaan.



Gambar 2.3.a Perbedaan plot Z_t dan $\hat{Z}_t$ saat nilai parameternya negatif. Semakin nilai parameter mendekati nol maka hasil eror nya jauh lebih besar, dengan selisih yang lebih terlihat dari pada saat parameternya menjauhi nol. Hal ini kemungkinan dikarenakan nilai parameter hasil prediksinya yang justru lebih kecil dari pada parameter awal.

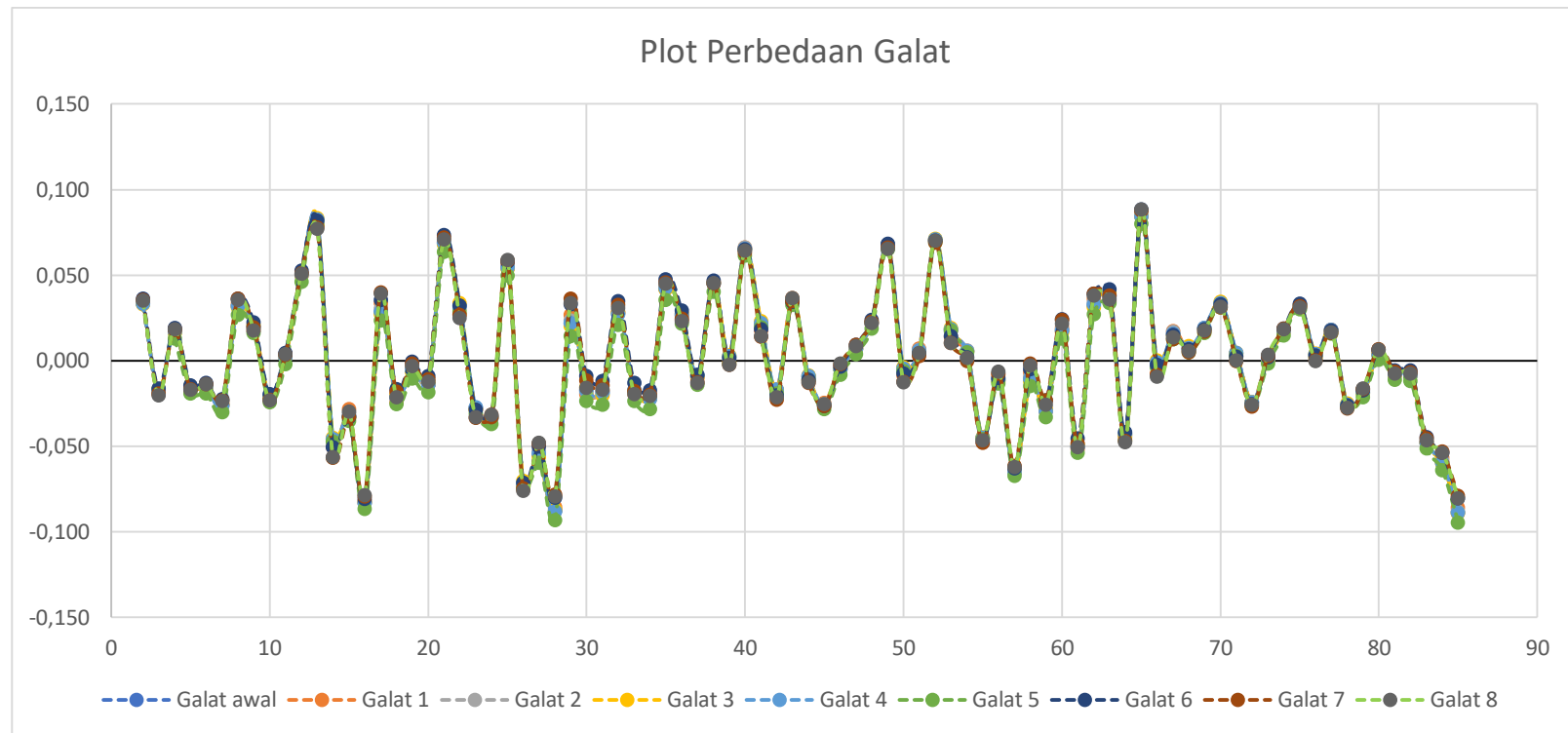


Gambar 2.3.b Perbedaan plot Z_t dan $\hat{Z}_t$ saat nilai parameternya positif. Saat parameter bernilai positif maka semakin mendekati nol hasil eror nya juga jauh lebih besar, dengan selisih yang lebih terlihat pada plot di atas. Hal ini kemungkinan dikarenakan nilai parameter hasil prediksinya yang justru lebih kecil dari pada parameter awal.

Gambar 2.3.a dan Gambar 2.3.b menunjukkan perbedaan plot model Z_t dan $\hat{Z}_t$. Plot $\hat{Z}_t$ dipengaruhi oleh hasil estimasi parameternya yang lebih besar atau lebih kecil dari parameter awal pada Z_t . Tentunya pola yang dihasilkan tetap sama, yang membedakan ialah seberapa besar variabilitas datanya akibat dari estimasi parameter. Hasil perbandingan parameternya mengakibatkan perbedaan pada tingkat variabilitasnya. Hal ini akan membantu kita untuk menduga model lebih cepat dengan melihat hasil simulasi.

UJI DIAGNOSA MODEL

Selanjutnya dilakukan uji diagnosa model dari selisih kedelapan model Z_t dan $\hat{Z}_t$, dalam hal ini disebut galat. Galat awal yang dibangkitkan ialah galat acak yang berdistribusi normal. Galat 1 diperoleh dari mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada model pertama dengan nilai parameter -0,25. Begitupun seterusnya untuk galat 2 yang dihasilkan dengan mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada model ke-2. Sampai pada galat 8 diperoleh dengan mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada percobaan model ke-8. Setelah melakukan perbandingan, ternyata pada Gambar 2.4 menunjukkan bahwa nilai galat awal yang dibangkitkan hampir sama persis dengan galat pada delapan model percobaan tersebut. Dapat disimpulkan bahwa galat kedelapan model tersebut telah menunjukkan distribusi normal dengan persebarannya yang acak. Dengan kata lain $\hat{Z}_t$ yang diperoleh dari nilai parameter hasil estimasi sudah memenuhi kecukupan model. Untuk menunjukkan langkah-langkah diagnosa model yang runtut, maka dapat ditunjukkan dengan melihat plot stasioneritas galatnya yang telah terpenuhi pada Gambar 2.4, normalitas galat dapat dilihat pada Tabel 2.4 dengan nilai p yang diperoleh. Tidak ada korelasi antar galat ditunjukkan pada Gambar 2.5.a dan Gambar 2.5.b.



Gambar 2.4 Plot selisih galat awal dengan galat yang diperoleh pada masing-masing model prediksi. Plot tersebut terlihat jelas bahwa galat yang diperoleh masing-masing model mendekati dengan galat awal, meskipun nilai parameternya berbeda. Hal ini tentunya menunjukkan bahwa galat pada masing-masing model sudah berdistribusi normal.

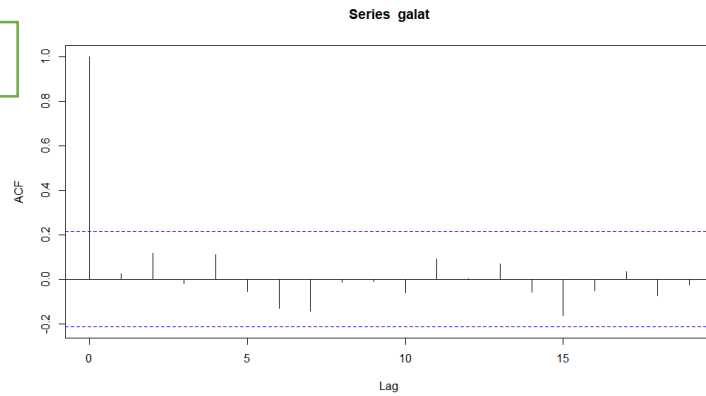
Tabel 2.5 Hasil uji normalitas galat pada hasil simulasi model AR(1)

Galat	Nilai p
Galat awal	0,6492
Galat model 1	0,6181
Galat model 2	0,6361
Galat model 3	0,6771
Galat model 4	0,6134
Galat model 5	0,6426
Galat model 6	0,6908
Galat model 7	0,6937
Galat model 8	0,6488

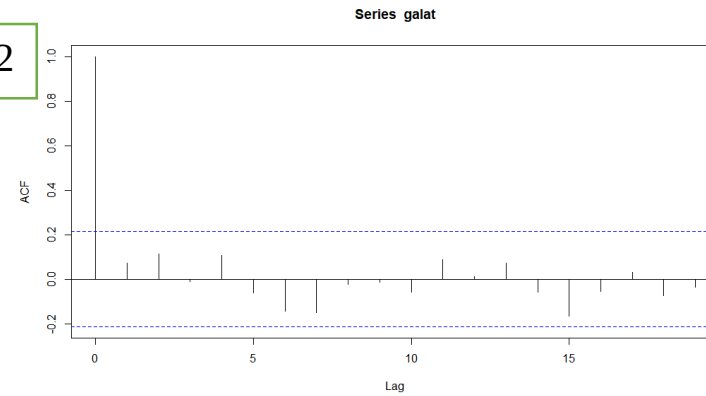
Galat awal yang dibangkitkan untuk melakukan simulasi model telah berdistribusi normal, sehingga saat mendapatkan hasil estimasi parameter yang baru maka model tersebut tetap akan memiliki galat yang berdistribusi normal. Pada perbandingan plot sebelumnya terlihat bahwa masing masing galat ada yang berada di atas nilai galat awal, juga ada yang berada di bawah nilai galat awal. Tentunya hal tersebut menunjukkan adanya salah satu galat yang memiliki nilai p terbesar. Dalam hal ini saat dilakukan dengan uji normalitas, ternyata masing-masing galat memiliki nilai p yang hampir sama. Berdasarkan Tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai p terbesar ialah hasil galat pada model ke tujuh, sedangkan untuk nilai p terkecil ialah hasil galat model ke empat. Maka dengan uji hipotesis H_0 yaitu dugaan galat berdistribusi normal, **diterima** untuk $\alpha < 69,37\%$.

Selanjutnya keindependenan galat ditunjukkan pada Gambar 2.5.a dan Gambar 2.5.b sebab tidak ada lag yang terpotong pada masing-masing ACF galat. Dengan demikian tidak ada korelasi antar lag pada masing-masing model. Oleh sebab itu, masing-masing model yang diperoleh telah memenuhi kecukupan model karena asumsi-asumsi yang ada telah terpenuhi.

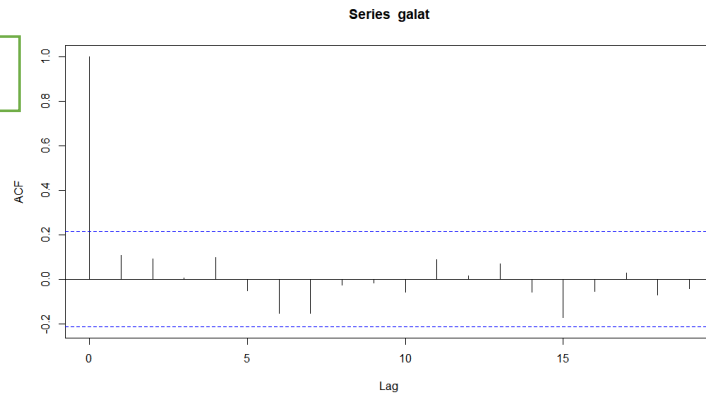
1



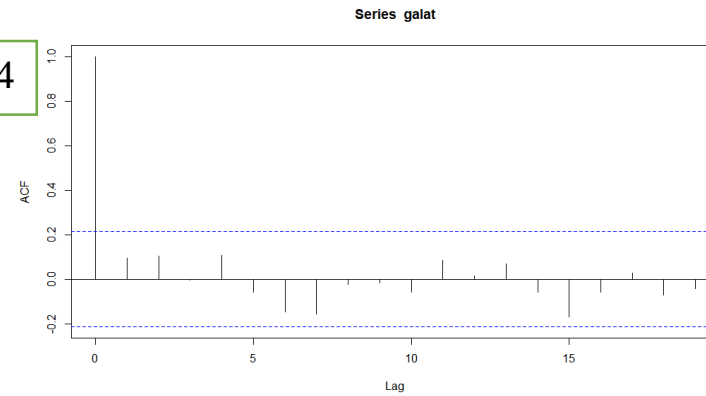
2



3

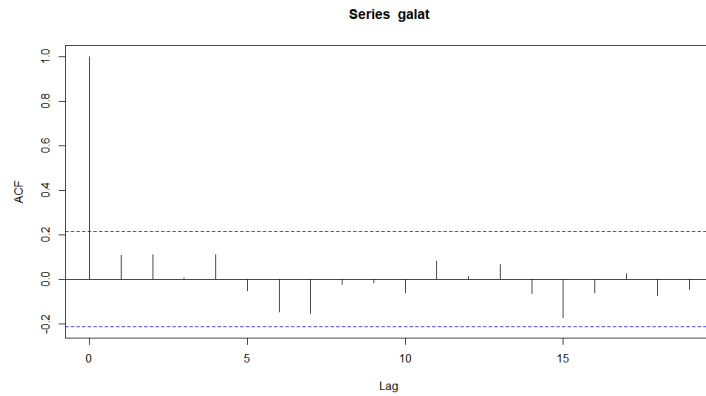


4

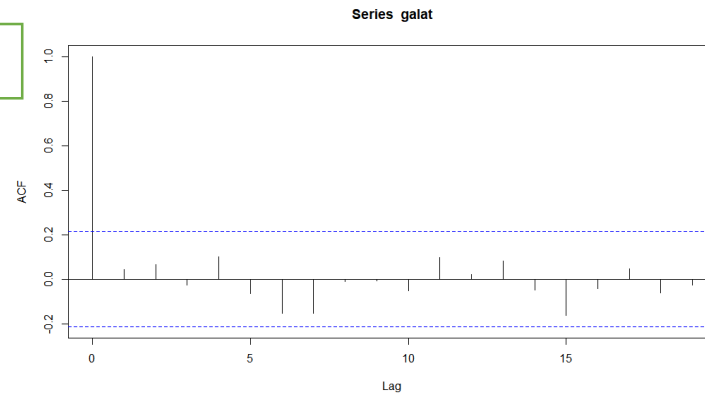


Gambar 2.5.a Plot ACF Residual model 1, 2, 3 dan 4. Plot ACF tidak memiliki lag yang terpotong pada batas signifikansi, maka dalam hal ini model 1, 2, 3 dan 4 yang diperoleh telah memenuhi asumsi galat tidak berkorelasi.

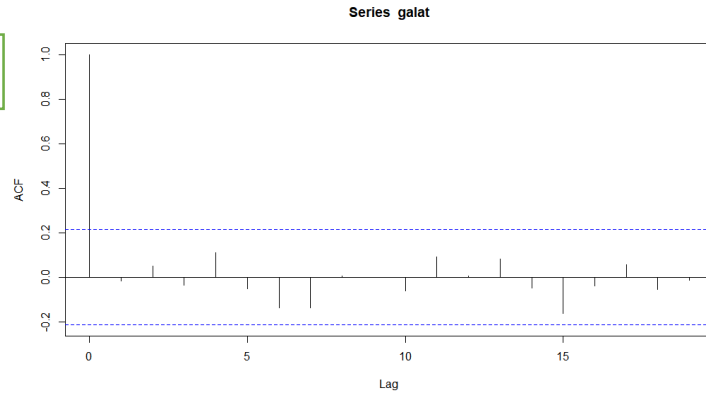
5



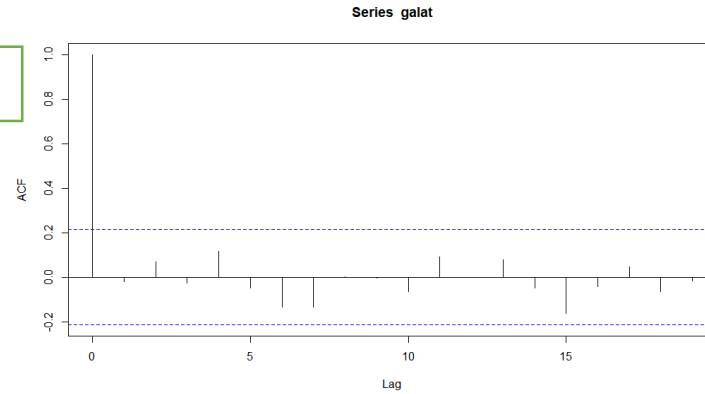
6



7



8



Gambar 2.5.b Plot ACF Residual model 5, 6, 7 dan 8. Plot ACF tidak memiliki lag yang terpotong pada batas signifikansi, maka dalam hal ini model 5, 6, 7 dan 8 yang diperoleh telah memenuhi asumsi galat tidak berkorelasi.

B. SIMULASI MODEL AR(2)

Simulasi model AR (2) membentuk nilai $Z_t, Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k}$ dengan menggunakan data galat yang sama dengan galat di AR (1). Selain itu parameter ϕ_1 dan ϕ_2 yang digunakan harus memenuhi syarat stasioner pada AR (2) yaitu $\phi_1 + \phi_2 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, dan $|\phi_2| < 1$. Dengan demikian, pemilihan nilai parameter yang berbeda-beda dalam simulasi ini dibatasi oleh nilai ϕ_1 dan ϕ_2 saling berbeda tanda positif dan negatif serta saling memiliki tanda yang sama positif dan negatif.

Tabel 2.6 Daftar nilai parameter yang digunakan dalam simulasi AR(2) dengan memperhatikan syarat kestasionerannya.

ϕ_1	ϕ_2	Syarat stasioner
0,92	-0,49	Memenuhi
0,49	0,25	Memenuhi
-0,49	-0,49	Memenuhi
-0,49	0,25	Memenuhi

Setelah membentuk $Z_t, Z_{t+1}, Z_{t+2}, \dots, Z_{t+k}$ maka dapat ditentukan besarnya ACF pada masing-masing parameter untuk dilakukan analisa lanjut dari plot yang diperoleh.

IDENTIFIKASI MODEL

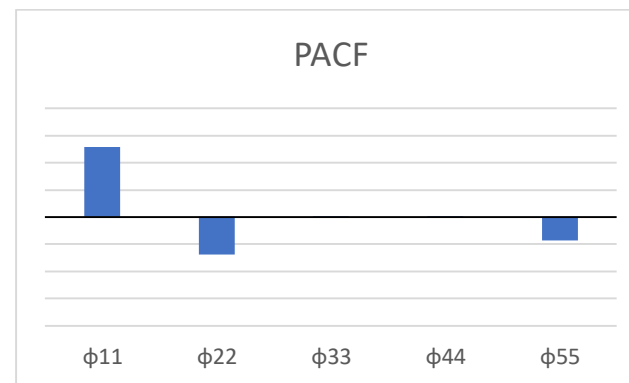
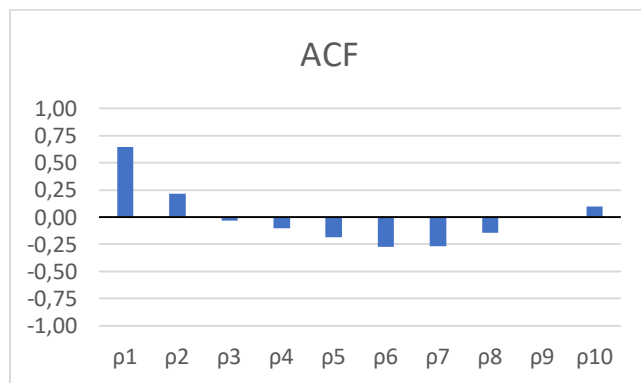
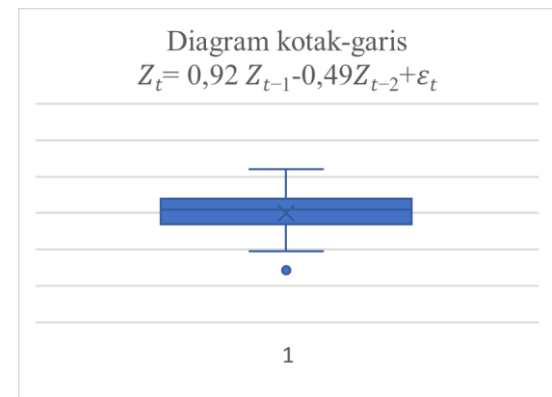
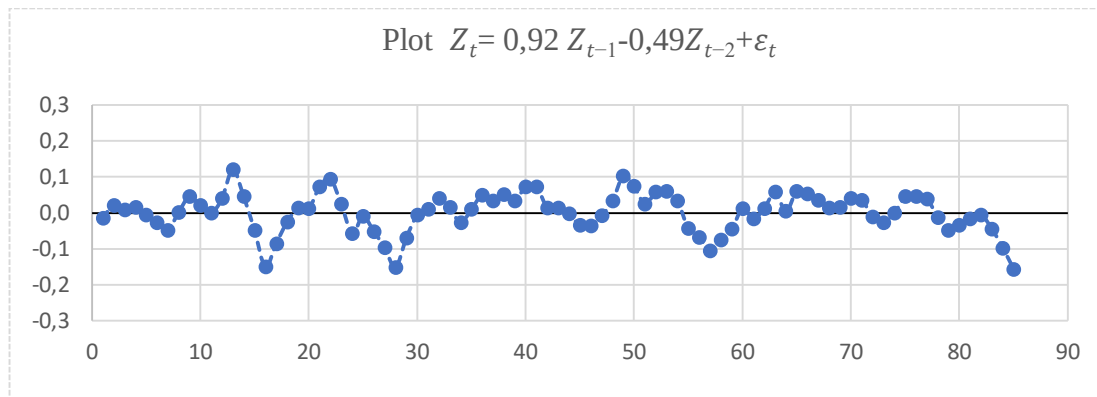
Berikut ini hasil simulasi AR (2) yang telah dilakukan dalam 4 kali percobaan berdasarkan parameter diatas:

1. Percobaan dengan nilai ϕ_1 positif dan ϕ_2 negatif, ϕ_1 positif dan ϕ_2 positif menghasilkan plot data yang lebih berfluktuasi dalam variansinya dari dengan kata variabilitas datanya lebih besar. Berbeda dengan percobaan saat ϕ_1 negatif dan ϕ_2 negatif, ϕ_1 negatif dan ϕ_2 positif yang menunjukkan fluktuasi datanya lebih kecil dengan kata lain variabilitas datanya lebih kecil. Hal ini dapat disimpulkan bahwa saat ϕ_1 positif maka plot data akan menunjukkan kenaikan dan penurunan data yang cukup besar, sedangkan pada ϕ_1 negatif menunjukkan plot yang lebih stasioner.
2. Pada plot diagram kotak-garis menunjukkan bahwa luasan persebaran data yang paling besar terjadi saat ϕ_1 negatif dan ϕ_2 positif, sementara untuk tiga

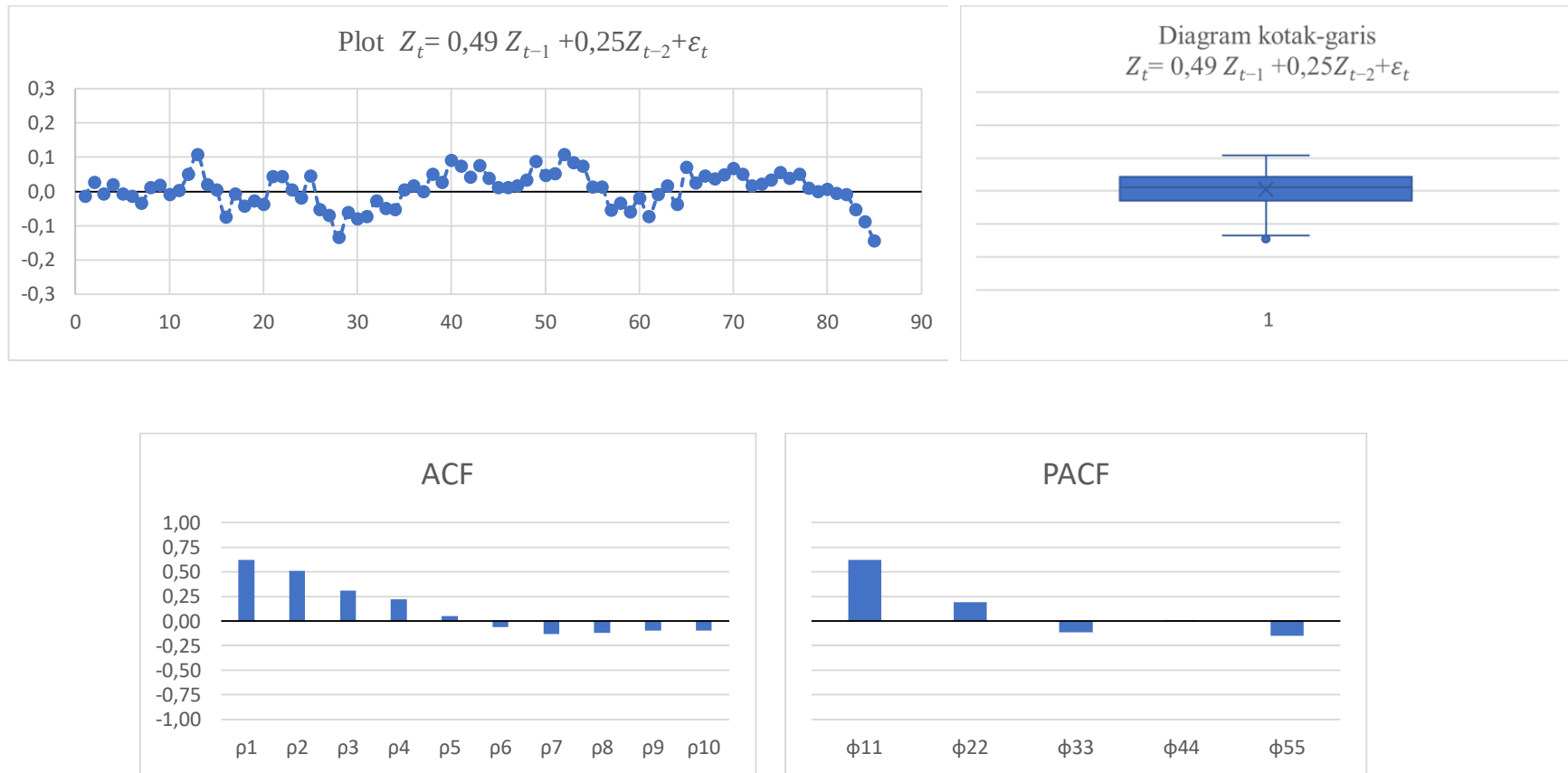
percobaan lainnya lebih kecil luasan persebarannya. Selain itu, pada ketiga percobaan lainnya juga terdapat pencilan. Hal ini menunjukkan bahwa meskipun dalam kenyataannya menemukan data yang mempunyai pencilan tidak menutup kemungkinan dapat dimodelkan seperti hasil simulasi.

3. Percobaan dengan nilai ϕ_1 positif dan ϕ_2 negatif, ϕ_1 positif dan ϕ_2 positif menghasilkan plot ACF yang menurun menuju nol dengan membentuk gelombang sinus. Sedangkan percobaan saat ϕ_1 negatif dan ϕ_2 negatif, ϕ_1 negatif dan ϕ_2 positif menunjukkan plot ACF yang menurun menuju nol dengan pola ganti tanda. Dalam hal ini dapat disimpulkan bahwa saat ϕ_1 positif maka plot ACF nya akan terbentuk menurun menuju nol dengan pola gelombang sinus. Sementara untuk ϕ_1 negatif plot ACF yang terbentuk menuju nol dengan pola ganti tanda.
4. Percobaan yang dilakukan dengan masing-masing nilai parameter menghasilkan bahwa nilai ϕ_1 dan ϕ_2 pada lag PACF bersesuaian dengan ϕ_1 dan ϕ_2 pada model yang digunakan. Meskipun terdapat sedikit perbedaan yang menunjukkan nilainya lebih besar atau lebih kecil. Selain itu tentunya dengan nilai lag-lag selanjutnya drastis menuju nol.

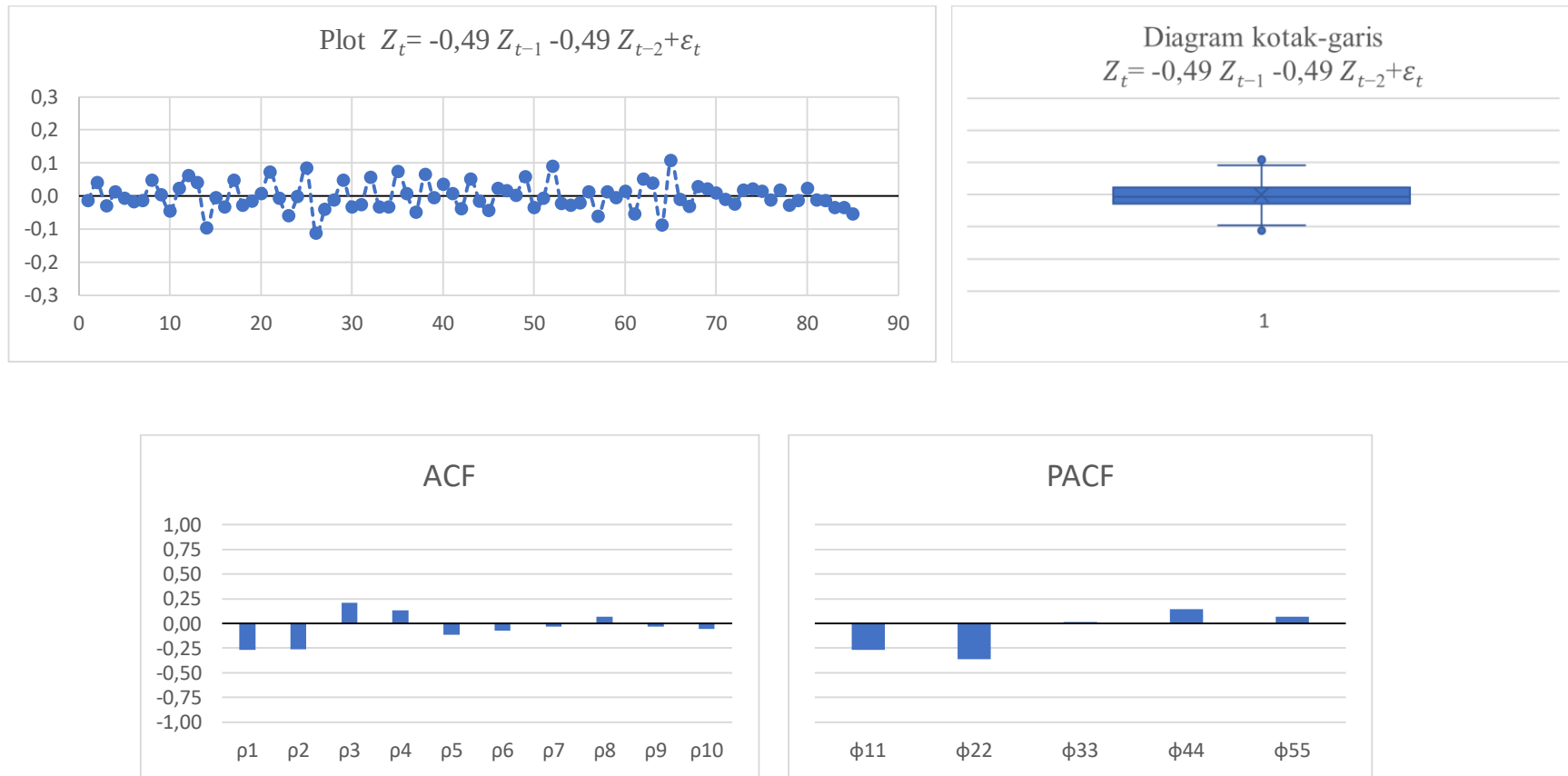
Berdasarkan hal tersebut dapat diambil kesimpulan bahwa pada AR(2) untuk membantu identifikasi model dalam plot maupun ACF sebenarnya memiliki karakteristik yang masih sama dengan AR(1). Semakin menjauhi nol nilai ϕ_1 , maka plot data yang diperoleh menunjukkan semakin berfluktuasi (variabilitas datanya semakin besar). Oleh sebab itu, untuk menunjukkan bahwa model AR(2) maka diperlukan adanya plot PACF yang akan dengan jelas mudah diduga.



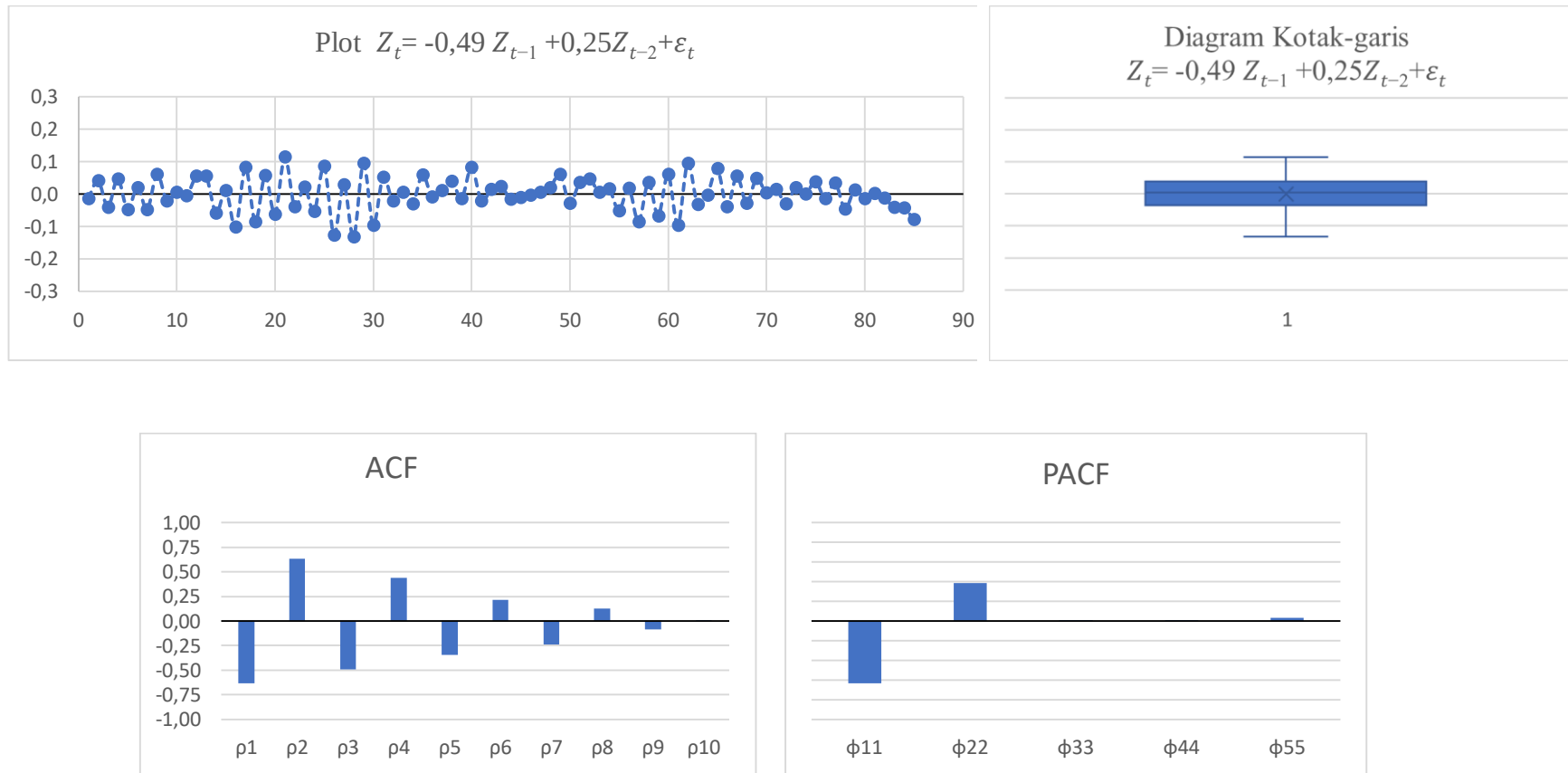
Gambar 2.6.a Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,92 Z_{t-1} - 0,49 Z_{t-2} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu cukup stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tampak seimbang pada diagram kotak-baris namun terdapat pencilan. ACF berpola menuju nol dengan gelombang sinus, dan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan negatif pada lag kedua.



Gambar 2.6.b Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = 0,49 Z_{t-1} + 0,25 Z_{t-2} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu cukup stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tampak seimbang pada diagram kotak-baris namun terdapat penculan. ACF berpola menuju nol membentuk gelombang sinus, sedangkan PACF menunjukkan nilai positif pada lag pertama dan lag kedua.



Gambar 2.6.c Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,49 Z_{t-1} - 0,49 Z_{t-2} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tampak seimbang pada diagram kotak-baris namun terdapat pencilan. Sementara ACF berpola menuju nol dengan membentuk gelombang sinus, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan lag kedua.



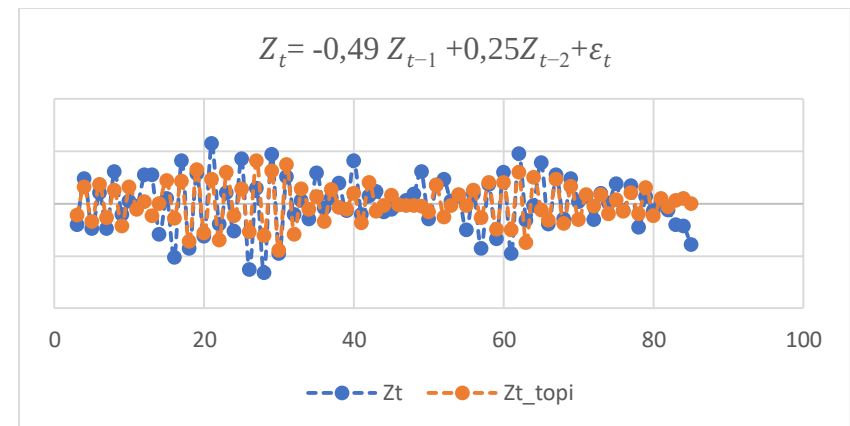
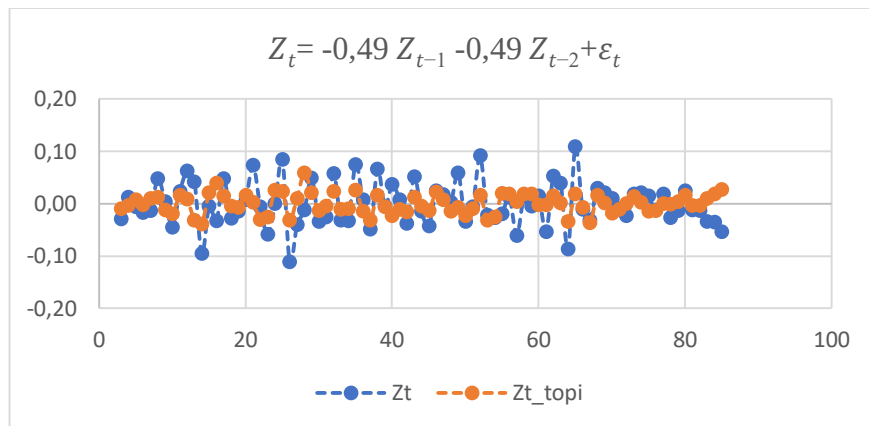
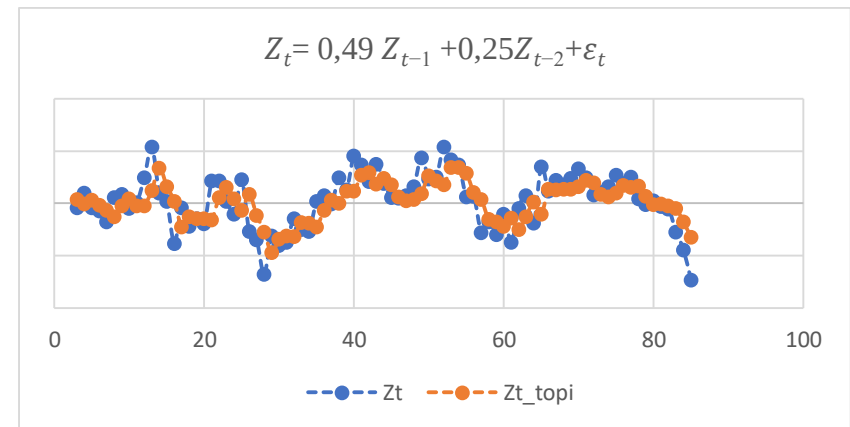
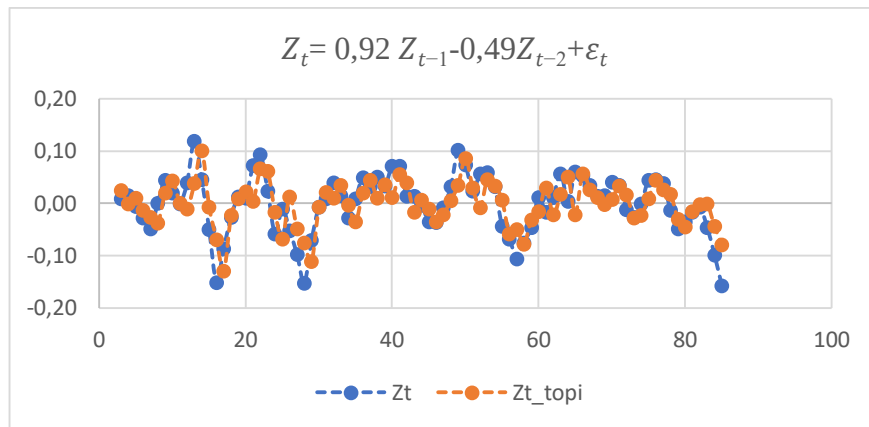
Gambar 2.6.d Plot deret waktu, diagram kotak-garis, acf dan pacf pada model $Z_t = -0,49 Z_{t-1} + 0,25 Z_{t-2} + \varepsilon_t$. Terlihat plot deret waktu stasioner dalam rata-rata dan variansi, dengan distribusinya yang tampak seimbang pada diagram kotak-baris. Sementara ACF berpola menuju nol dengan membentuk pola berganti tanda, sedangkan PACF menunjukkan nilai negatif pada lag pertama dan positif lag kedua.

ESTIMASI PARAMETER

Tabel 2.7 Estimasi parameter simulasi AR(2) yang menggunakan model Z_t

Model	Parameter				Model	
	Parameter awal		Hasil estimasi		Awal = Z_t	$\hat{Z}_t$
1	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,001	$Z_t = 0,92Z_{t-1} - 0,49Z_{t-2} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,001 + 0,989Z_{t-1} - 0,417Z_{t-2} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,92	ϕ_1	0,989		
	ϕ_2	-0,49	ϕ_2	-0,417		
2	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,003	$Z_t = 0,49Z_{t-1} + 0,25Z_{t-2} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,003 + 0,556Z_{t-1} + 0,231Z_{t-2} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	0,49	ϕ_1	0,556		
	ϕ_2	0,25	ϕ_2	0,231		
3	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,0002	$Z_t = -0,49Z_{t-1} - 0,49Z_{t-2} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,0002 - 0,377Z_{t-1} - 0,383Z_{t-2} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-0,49	ϕ_1	-0,377		
	ϕ_2	-0,49	ϕ_2	-0,383		
4	ϕ_0	0	ϕ_0	-0,0006	$Z_t = -0,49Z_{t-1} + 0,25Z_{t-2} + \varepsilon_t$	$\hat{Z}_t = -0,0006 - 0,383Z_{t-1} + 0,399Z_{t-2} + \varepsilon_t$
	ϕ_1	-0,49	ϕ_1	-0,383		
	ϕ_2	0,25	ϕ_2	0,399		

Pemodelan awal dilakukan dengan membentuk Z_t menggunakan parameter yang telah ditentukan dan galat yang dibangkitkan. Kemudian diestimasi parameter Z_t pada masing-masing model untuk membentuk nilai prediksi dari Z_t , ditulis dengan $\hat{Z}_t$. Hasil estimasi parameter pada masing-masing $\hat{Z}_t$ diperoleh nilai ϕ_0 mendekati nilai parameter awal yang digunakan yaitu sebesar -0,001; -0,003; -0,0002; dan -0,0006. Pada parameter $\phi_1 = 0,92; 0,49; -0,49$ menghasilkan estimasi mendekati nilai parameter awalnya yaitu $\phi_1 = 0,989; 0,556; -0,383$. Sama halnya juga dengan $\phi_2 = -0,49; 0,25$ yang menghasilkan nilai estimasi mendekati parameter aslinya. Namun tidak semua hasil estimasi menunjukkan nilai yang sama persis dengan parameter aslinya. Beberapa menunjukkan adanya perbedaan yang lebih besar maupun lebih kecil dari parameter aslinya. Hal ini berarti bahwa $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan dipengaruhi juga dengan galatnya sehingga nilai parameternya berbeda. Namun ini menunjukkan bahwa plot ACF dan PACF yang terbentuk dalam simulasi bisa menggambarkan nilai parameter lain yang mendekati parameter awal dalam percobaan.

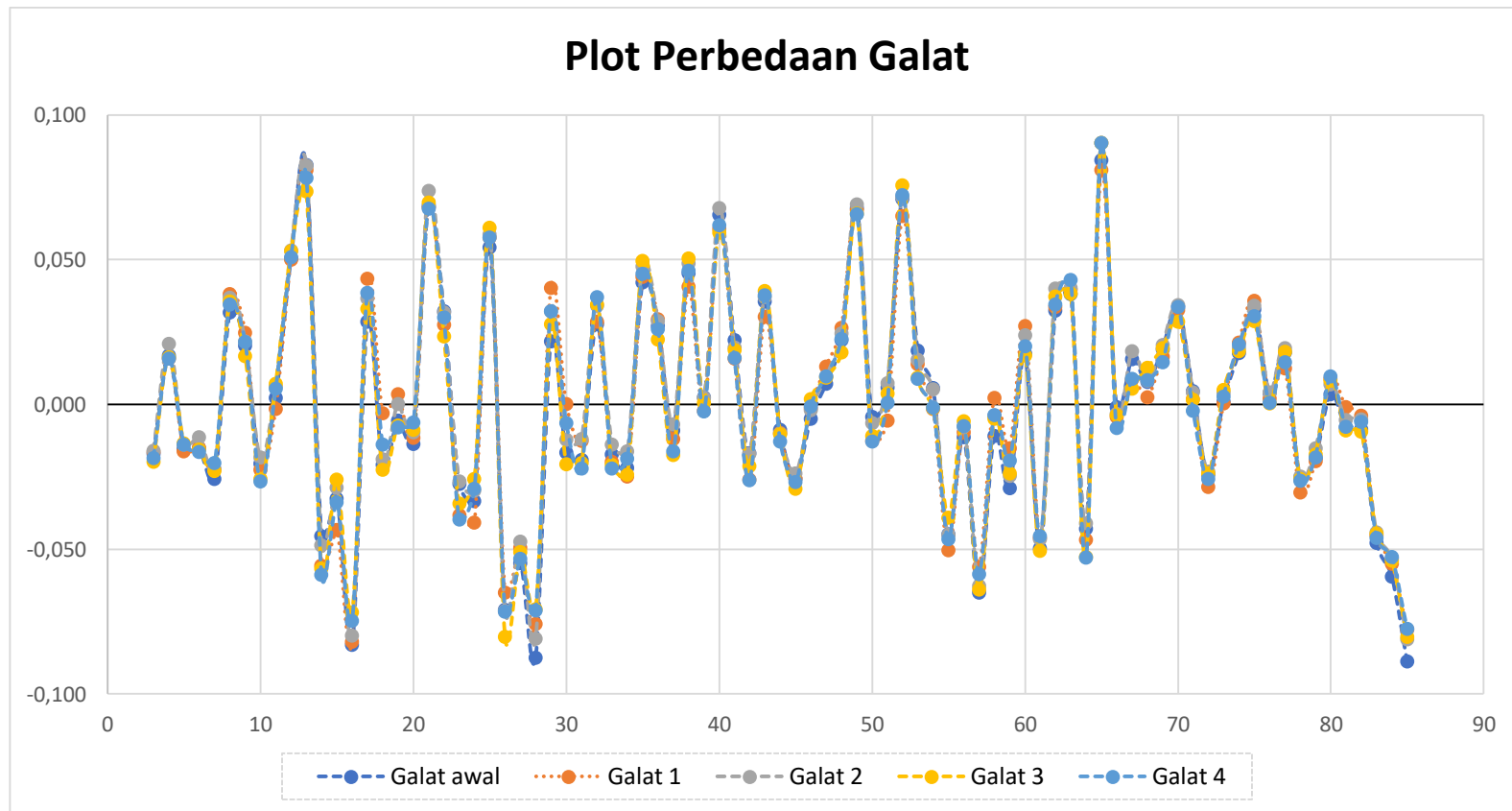


Gambar 2.7 Perbedaan plot Z_t dan $\hat{Z}_t$ untuk hasil model AR(2). Terlihat dalam Gambar bahwa saat parameter pertama bernilai positif maka hasil plot datanya mendekati plot data awal, sedangkan saat parameter pertama bernilai negatif ternyata hasil plotnya tidak sama persis nilainya namun untuk polanya tetap mengikuti pola data awal.

Gambar 2.7 menunjukkan perbedaan plot model Z_t dan $\hat{Z}_t$. Tentunya dengan pola yang sama, terdapat perbedaan pada seberapa besar variabilitas datanya akibat dari estimasi parameternya. Meskipun plot $\hat{Z}_t$ dipengaruhi oleh hasil estimasi parameternya yang lebih besar atau lebih kecil dari parameter awal pada Z_t . Hasil perbandingan parameternya mengakibatkan perbedaan pada tingkat variabilitasnya. Hal ini akan membantu untuk melakukan pendugaan model kedepannya dengan melihat hasil simulasi.

UJI DIAGNOSA MODEL

Selanjutnya menggunakan langkah yang sama pada simulasi AR(1), tentu perlu dilakukan uji diagnosa model. Uji ini melihat dari selisih keempat model Z_t dan $\hat{Z}_t$, dalam hal ini disebut galat. Galat awal dibangkitkan secara acak dengan distribusi normal. Galat 1 diperoleh dari mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada model pertama dengan nilai parameter 0,92 dan -0,49. Begitupun seterusnya untuk galat 2 yang dihasilkan dengan mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada model ke-2. Sampai pada galat 4 diperoleh dengan mencari selisih nilai Z_t dengan $\hat{Z}_t$ yang dihasilkan pada percobaan model ke-4. Setelah melakukan perbandingan, ternyata pada Gambar 2.8 menunjukkan bahwa nilai galat awal yang dibangkitkan hampir sama persis dengan galat pada empat model percobaan tersebut. Dapat disimpulkan bahwa galat keempat model tersebut telah menunjukkan distribusi normal dengan persebarannya yang acak. Dengan kata lain $\hat{Z}_t$ yang diperoleh dari nilai parameter hasil estimasi sudah memenuhi kecukupan model. Untuk menunjukkan langkah-langkah diagnosa model yang runtut, maka dapat ditunjukkan dengan melihat plot stasioneritas galatnya yang telah terpenuhi pada Gambar 2.8, normalitas galat dapat dilihat pada Tabel 2.8 dengan nilai p yang diperoleh. Serta tidak ada korelasi antar galat ditunjukkan pada Gambar 2.9.



Gambar 2.8 Plot selisih galat awal dengan galat yang dihasilkan oleh masing-masing model prediksi. Terlihat pola yang sama untuk masing-masing galat tersebut, namun tentunya ada perbedaan nilai. Dengan kata lain jika dibandingkan dengan galat awal ada yang jauh lebih besar dan jauh lebih kecil.

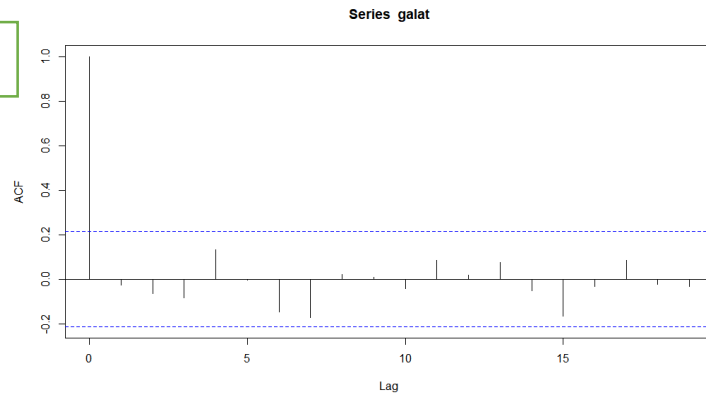
Tabel 2.8 Hasil uji normalitas galat pada simulasi AR(2)

Galat	Nilai p
Galat awal	0,7493
Galat model 1	0,8236
Galat model 2	0,7344
Galat model 3	0,7378
Galat model 4	0,7158

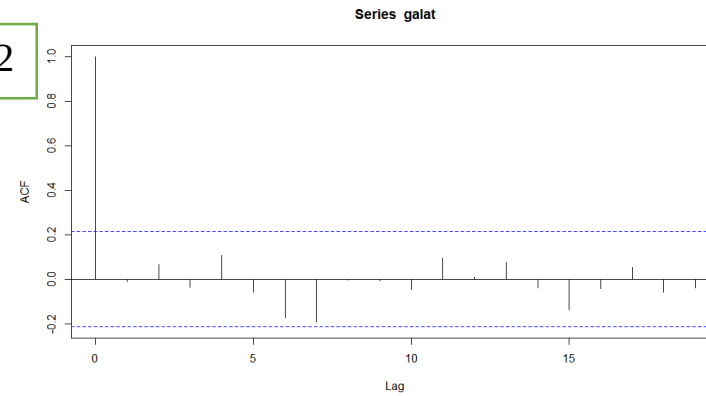
Hasil estimasi parameter yang baru pada model $\hat{Z}_t$ memiliki galat yang berdistribusi normal, karena galat awal yang dibangkitkan untuk melakukan simulasi model telah berdistribusi normal. Pada perbandingan plot sebelumnya terlihat bahwa masing masing galat ada yang berada di atas nilai galat awal, juga ada yang berada di bawah nilai galat awal. Tentunya hal tersebut menunjukkan adanya salah satu galat yang memiliki nilai p terbesar. Dalam hal ini saat dilakukan dengan uji normalitas, ternyata masing-masing galat memiliki nilai p yang hampir sama. Berdasarkan Tabel di atas dapat dilihat bahwa nilai p terbesar ialah hasil galat pada model ke satu, sedangkan untuk nilai p terkecil ialah hasil galat model ke empat. Maka dengan uji hipotesis H_0 yaitu dugaan galat berdistribusi normal, **diterima** untuk $\alpha < 82,36\%$.

Selanjutnya, keindependenan galat ditunjukkan pada Gambar 2.9, sebab tidak ada lag yang terpotong pada masing-masing ACF galatnya. Dengan demikian menunjukkan bahwa tidak ada korelasi antar lag pada masing-masing galat. Oleh sebab itu, masing-masing model yang diperoleh telah memenuhi kecukupan model karena asumsi-asumsi yang ada telah terpenuhi.

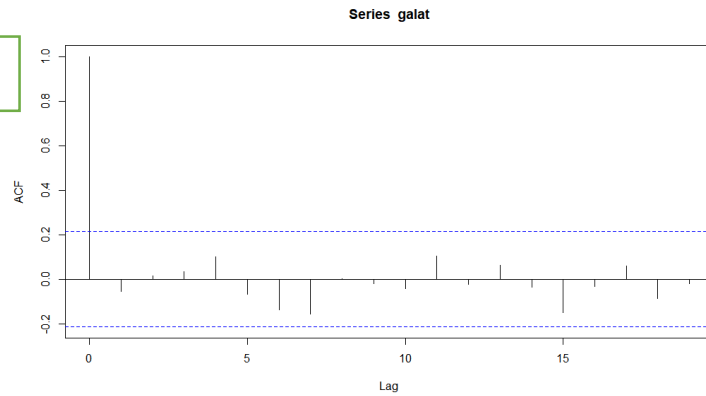
1



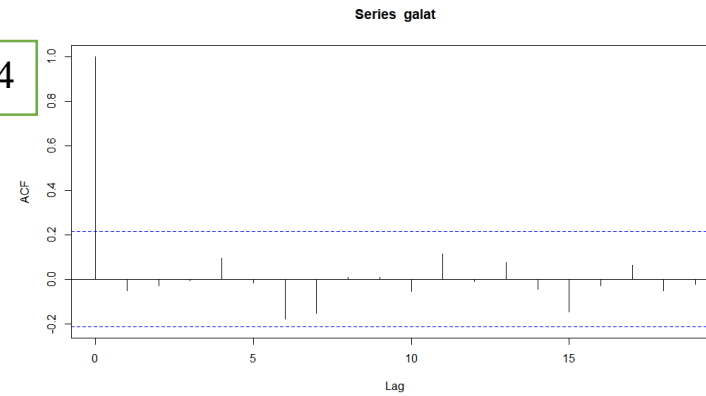
2



3



4



Gambar 2.9 Plot ACF Residual model 1, 2, 3 dan 4. Plot ACF tidak memiliki lag yang terpotong pada batas signifikansi, maka dalam hal ini model 1, 2, 3 dan 4 yang diperoleh telah memenuhi asumsi galat tidak berkorelasi.