BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

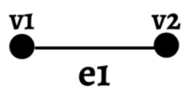
Pada bab ini akan dijelaskan mengenai teori-teori yang digunakan dalam membantu penelitian ini. Teori-teori tersebut berkaitan dengan matriks, graf, dan matriks ketetanggaan.

2.1 Dasar-dasar Graf

Secara umum, graf dapat didefinisikan seperti berikut.

Definisi 2.1.1 Graf G merupakan pasangan himpunan (V, E) dapat ditulis dengan $G = (V, E)$ dengan V adalah suatu himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai simpul, dan E adalah suatu himpunan (yang mungkin kosong) yang berisi pasangan simpul yang tak berurutan dari simpul-simpul yang berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dituliskan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dituliskan dengan $E(G)$ [3].

Contoh 2.1.1 Gambar di bawah ini merupakan contoh dari suatu graf.



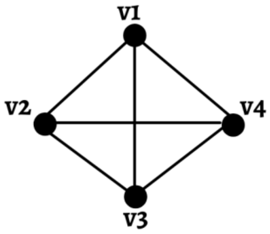
Gambar 2.1.1 Graf.

Berdasarkan Gambar 2.1.1, terdapat simpul v_1 dan v_2 yang dihubungkan oleh sebuah sisi e_1.

Pengelompokkan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda maupun gelang ataupun berdasarkan orientasi arahnya. Berikut merupakan definisi graf tak-berarah.

Definisi 2.1.2 Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak-berarah. Pada graf tak-berarah, urutan pasangan simpul yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi, $(u, v) = (v, u)$ adalah sisi yang sama [3].

Contoh 2.1.1 Berikut merupakan contoh dari graf tak berarah



Gambar 2.1.2 Graf Tak Berarah.

Gambar 2.1.2 adalah graf tak berarah yang memiliki 4 simpul yang berbeda serta dihubungkan oleh sebuah sisi, dengan setiap sisinya merupakan pasangan tak-terurut, sehingga dapat ditulis (v_1, v_2)= (v_2, v_1).

Berikut akan dijelaskan mengenai beberapa istilah yang diperlukan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 2.1.3 Dua buah simpul pada graf tak-berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Sehingga, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G [3].

Contoh 2.1.3 Berdasarkan Gambar 2.1.2, simpul v_1 bertetangga dengan simpul v_2, v_3 dan v_4. Sedangkan simpul v_2 bertetangga dengan v_1, v_3 dan v_4.

Definisi 2.1.4 Derajat (*Degree*) merupakan jumlah sisi yang bersisian dengan suatu simpul pada graf tak-berarah. Derajat dari simpul v dapat dilambangkan sebagai $d(v)$ [3].

Contoh 2.1.4 Berdasarkan Gambar 2.1.2, derajat yang dimiliki oleh semua simpul adalah sama yaitu $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = 3$.

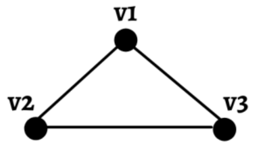
Definisi 2.1.5 Lintasan (*Path*) merupakan barisan berselang-seling simpul-simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = \left(v_0, v_1\right),\ e_2 = \left(v_1, v_2\right), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf dengan panjang n dari simpul awal v_0 ke simpul tujuan v_n pada graf G [3].

Contoh 2.1.5 Berdasarkan Gambar 2.1.2, barisan $v_{1,}v_2, v_4, v_3$ merupakan suatu lintasan dengan barisan sisinya, yaitu $e_1 = (v_{1,}v_2)$, $e_2 = (v_{2,}v_4)$, $e_3 = (v_{4,}v_3)$.

Graf dapat dikelompokkan berdasarkan ciri khusus yang dimilikinya. Salah satu ciri tersebut berupa ada tidaknya gelang pada suatu graf.

Definisi 2.1.6 Graf Sederhana merupakan graf yang tidak mengandung gelang (*loop*) maupun sisi-ganda [3].

Contoh 2.1.6



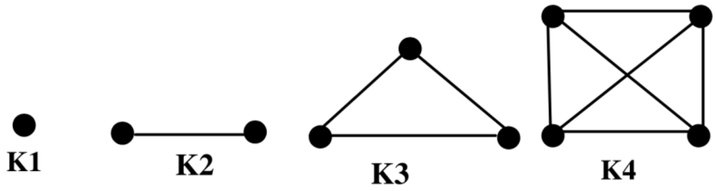
Gambar 2.1.3 Graf Lingkaran.

Graf lingkaran dapat dikatakan sebagai graf sederhana dengan setiap simpulnya memiliki derajat dua.

Penelitian ini membahas determinan matriks ketetanggan dari graf lolipop $L_{(3,n)}$ dan $L_{(4,n)}$. Sebelum menjelaskan definisi dari graf lolipop, berikut dikemukakan definisi graf lengkap dan graf lintasan.

Definisi 2.1.7 Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap simpulnya mempunyai sisi ke semua simpul lainnya. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Setiap simpul pada K_n berderajat $n - 1$ [3].

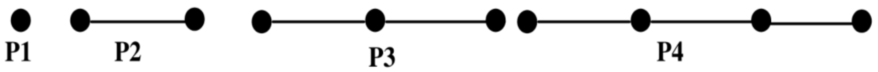
Contoh 2.1.7



Gambar 2.1.4 Graf lengkap $\boldsymbol{K_n}$ dengan $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{4}$.

Definisi 2.1.8 Graf lintasan merupakan suatu graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik yang dilambangkan dengan P_n [5].

Contoh 2.1.8

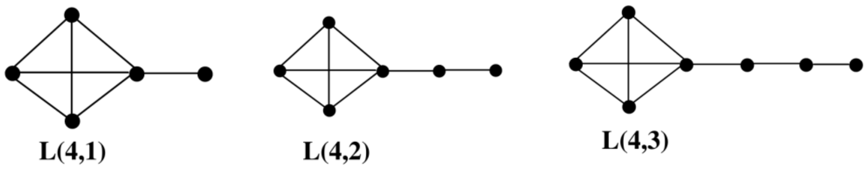


Gambar 2.1.5 Graf Lintasan $\boldsymbol{P_n}$ dengan $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{4}$.

Secara umum, graf lolipop dapat didefinisikan seperti berikut.

Definisi 2.1.9 Graf lolipop $L_{(m,n)}$ adalah suatu graf yang diperoleh dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_m pada sebuah lintasan P_n melalui sebuah jembatan [5].

Contoh 2.1.9



Gambar 2.1.6 Graf Lolipop dengan $\boldsymbol{m} = \mathbf{4}$ dan $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{n} \leq \mathbf{3}$.

2.2 Matriks

Matriks adalah sekumpulan elemen-elemen a_{ij} dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ menyatakan baris dan $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ menyatakan kolom. Secara umum bentuk dari suatu matriks A yang berukuran $m \times n$ adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.2.1 Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut dikatakan entri dari matriks [4].

Contoh 2.2.1 Berikut ini beberapa contoh matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks ditentukan oleh jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimiliki matriks tersebut. Berdasarkan Contoh 2.2.1, matriks A mempunyai 3 baris dan 2 kolom, sehingga ukuran matriksnya adalah 3×2. Sedangkan matriks B, C dan D berturut-turut memiliki ukuran 2×1, 1×4 dan 1×1.

Definisi 2.2.2 Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$. Matriks ketetanggaan dari G adalah matriks yang berukuran $n \times n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ketika simpul i dan j bertetangga.} \\ 0, \text{ketika simpul i dan j tidak bertetangga.} \end{cases}$$

Contoh 2.2.2 Matriks ketetanggaan dari graf pada Gambar 2.1.2 adalah

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entri pada diagonal utama bernilai 0 karena graf tersebut tidak memiliki gelang maupun sisi ganda. Sedangkan entri lain bernilai 1 karena setiap simpulnya saling bertetangga.

2.3 Determinan

Determinan dapat diperoleh dengan menentukan hasilkali elementer dari matriks A, determinan dari matriks A dilambangkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Jika terdapat matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = ad - bc$.

Definisi 2.3.1 Permutasi dari suatu himpunan bilangan bulat atau *integer* seperti $\{1,2,\ldots,n\}$ merupakan susunan *integer-integer* memiliki aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan [4].

Permutasi dari himpunan $\{1,2,\ldots,n\}$ dinyatakan sebagai $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ dengan j_1 adalah integer pertama dari permutasi, j_2 adalah integer kedua dari permutasi dan seterusnya. Dalam suatu permutasi $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ terdapat pembalikan *(inversi)* jika *integer* yang lebih besar mendahului yang lebih kecil.

Contoh 2.2.1

Himpunan integer $\{1,2,3\}$ membentuk 6 permutasi yang berbeda, yaitu $(1,2,3), (2,1,3), (3,1,2), (1,3,2), (2,3,1), (3,2,1)$.

Karena posisi pertama dapat diisi dengan 3 cara dan kemudian posisi kedua dapat diisi oleh 2 cara. Akhirnya karena posisi terakhir hanya dapat diisi dengan 1 cara, maka terdapat $3 \times 2 \times 1 = 6$. Secara umum, himpunan $\{1,2,\ldots,n\}$ akan memiliki $n!$ permutasi yang berbeda.

Definisi 2.2.2 Suatu permutasi dikatakan genap jika banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan ganjil jika banyaknya inversi adalah integer ganjil [4].

Contoh 2.2.2

Tabel berikut ini merupakan klasifikasi dari berbagai permutasi $\{1,2,3\}$ sebagai genap atau ganjil.

Tabel 2.2.2 Klasifikasikan permutasi

Permutasi	Banyaknya inversi	Klasifikasi
(1,2,3)	0	genap
(1,3,2)	1	ganjil
(2,1,3)	1	ganjil
(2,3,1)	2	genap
(3,1,2)	2	genap
(3,2,1)	3	ganjil

Definisi 2.2.3 Determinan merupakan suatu hasilkali elementer dari matriks A berukuran $n \times n$ dengan hasilkali dari n entri dari A, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama [4].

Contoh 2.2.3

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Determinan matriks A dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{22}a_{31}$$

Definisi 2.2.4 Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}\, M_{ij}$ dinyatakan dengan C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij} [4].

Contoh 2.2.4 Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ minor dan kofaktor dari matriks tersebut adalah sebagai berikut.

Minor dari entri a_{11}adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & 2 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ sedangkan kofaktor dari entri a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 1$.

Minor dari entri a_{32} adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \cancel{1} \\ 1 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$ dan kofaktor dari entri a_{32} adalah $C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -2$.

Teorema 2.2.4 [4] Determinan dari matriks A yang berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya serta menjumlahkan hasilkali yang diperoleh, yaitu untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$.

$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$

(Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$

(Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Berikut ini akan dipaparkan mengenai determinan matriks persegi dengan menggunakan partisi matriks blok.

Teorema 2.2.1 [6] Jika A dan D adalah matriks persegi,

$det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \times \det(D - CA^{-1}B)$, ketika A memiliki invers.