BAB II
LANDASAN TEORI

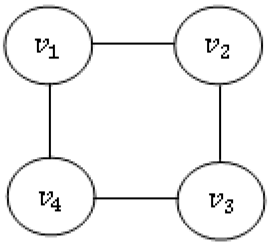
Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan konsep dasar dari teori graf dan dominasi lokasi pada operasi *comb* antara dua graf lintasan yang akan digunakan pada bab berikutnya. Berikut landasan teori dikutip dari **[5][6]**.

2.1 Konsep Dasar Graf

Secara umum, graf G adalah pasangan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga, yang elemen-elemennya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan-pasangan dari elemen-elemen $V(G)$ disebut sisi *(edge)*. Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan suatu himpunan titik dengan n buah titik dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ merupakan suatu himpunan sisi dengan m buah sisi. Jika dimisalkan $e = uv \in E(G)$, sisi $e = uv$ adalah pasangan takterurut dari $V(G)$ yakni $uv = vu$ dan berbeda yakni $u \neq v$, maka graf G disebut graf sederhana. Jika $vu \neq vu$, maka sisi uv dan vu disebut sisi-sisi yang paralel dan biasanya diberi arah sehingga disebut graf berarah.

Sebuah graf H disebut subgraf dari graf G dinotasikan dengan $H \subseteq G$, jika $V(G) \subseteq V(H)\ dan\ E(G) \subseteq E(H)$. Misalkan $v \in G$ maka $G \setminus v$ adalah subgraf dari G yang diperoleh dari G dengan menghapus titik v beserta sisi-sisi yang terkait dengan v.

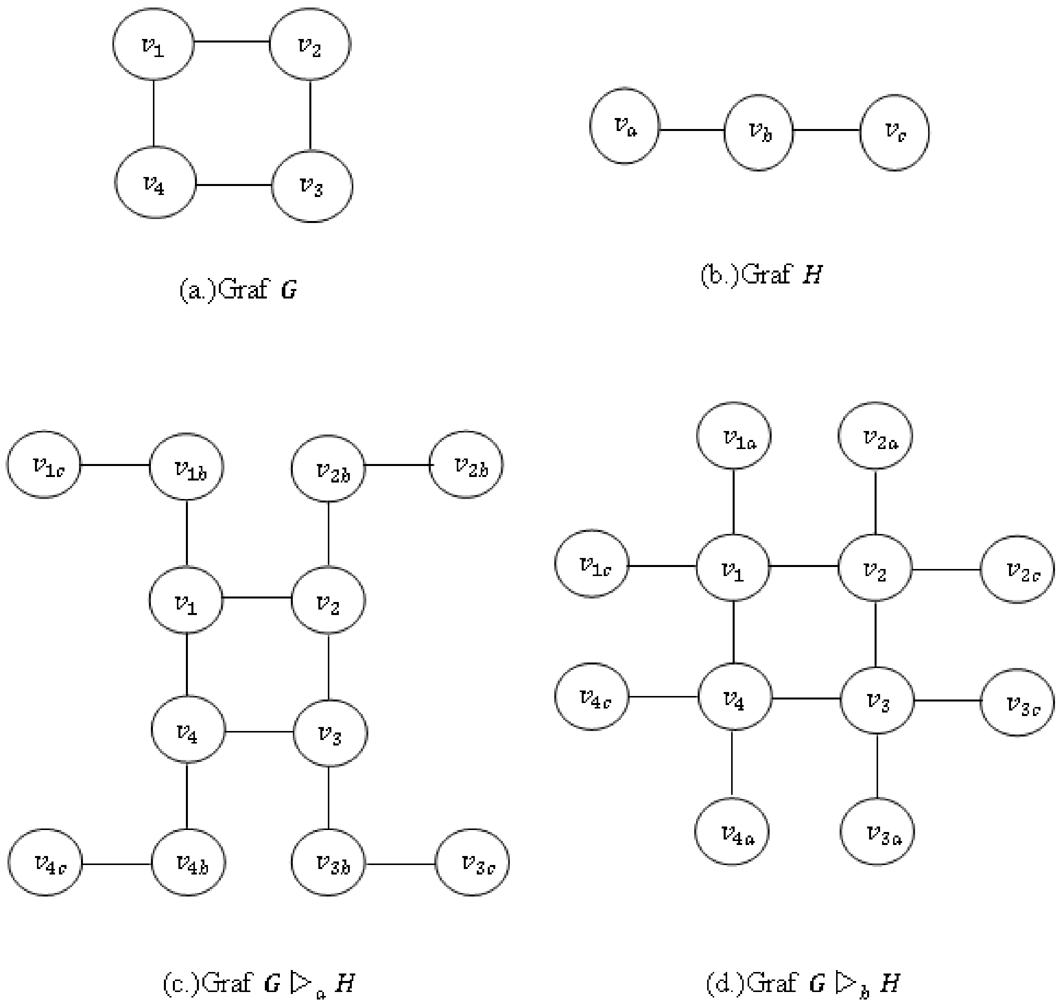
Dua buah titik dikatakan bertetangga bila keduanya menjadi ujung sisi yang sama. Misalkan suatu sisi $u, v \in V(G)$, dikatakan bertetangga jika $uv \in E$. Himpunan tetangga terbuka dari titik x dinotasikan sebagai $N_G(x)$, jika anggota dari titik di graf G yang memiliki pasangan dari sisi di titik graf G. Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.1 himpunan tetangga terbuka dari titik v_1 yaitu $N_G(v_1) = \{v_2, v_3\}$ dan titik v_1 tidak bertetangga dengan titik v_4, $N_G(v_1) \neq \{v_4\}$.



Gambar 2. 1 Contoh Graf G

Suatu lintasan (*path*) pada graf G merupakan sebuah jalan dimana setiap simpul dan sisinya tidak berulang **[7]**. Graf lintasan didinotasikan sebagai Pn. Misalkan suatu graf lintasan dengan himpunan titik $V(P_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dan himpunan sisi $E(P_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ yang memenuhi $e_1 = v_0v_1, e_2 = v_1v_2, \dots, e_m = v_{n-1}v_n$.

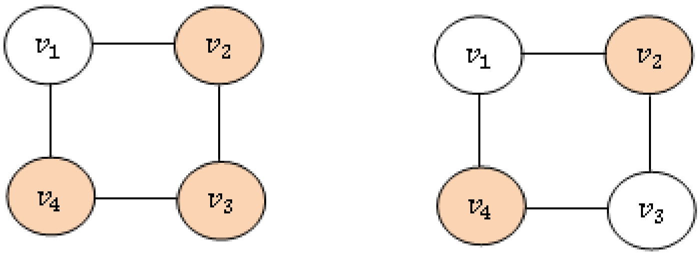
Misalkan graf G dan H merupakan dua graf terhubung, dimana hasil operasi *comb* antara graf G dan H, dituliskan sebagai $G \rhd_o H$. Graf yang didapatkan dari membuat satu duplikasi dari G dan membuat duplikasi H sebanyak titik di G, kemudian menempelkan pada titik v_{io} dari duplikasi H pada masing-masing titik di G. Struktur dari graf $G \rhd_o H$ bergantung pada pemilihan titik v_{io} pada graf H. Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Hasil Operasi *Comb*

2.2 Dominasi Lokasi

Misalkam himpunan titik $S \subseteq G$ dikatakan himpunan dominasi dari graf G, jika titik dari graf G selain di S bertetangga dengan titik di S. Sedangkan untuk bilangan dominasi adalah himpunan dominasi dari G dengan minimum kardinalitas yang mungkin. Dinotasikan sebagai $\gamma\ (G)$. Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.3



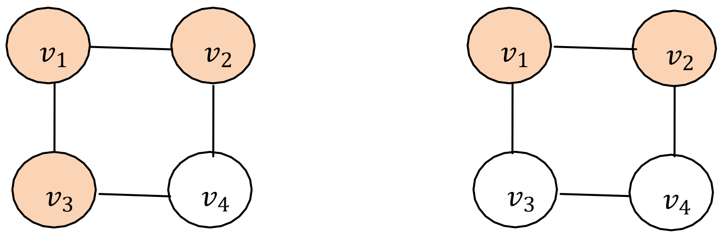
(a.)Graf S_1 (a.)Graf S_2

Gambar 2. 3 Contoh Himpunan Dominasi

Misalkan diberikan graf seperti gambar diatas dengan $S_1 = \{v_2, v_3, v_4\}$, $S_2 = \{v_2, v_3\}$, dan $S_3 = \{v_1\}$, maka S_1 dan S_2 merupakan himpunan dominasi sedangkan S_3 bukan himpunan dominasi karena titik v_4 tidak memiliki tetangga di S_1. Bilangan dominasi dari contoh himpunan dominasi diatas yaitu 2.

Suatu himpunan dominasi lokasi dari G jika untuk setiap titik yang berbeda u dan v di $V(G)$ selain S berlaku $\emptyset \neq N_G(u) \cap S \neq N_G(v) \cap S \neq \emptyset$, dimana S merupakan himpunan yang mendominasi lokasi. Sedangkan untuk bilangan dominasi lokasi adalah nilai kardinalitas minimum dari semua S yang mungkin dari graf G. Dinotasikan sebagai $\lambda\,(G)$. Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.4

Misalkan diberikan graf dengan $S_4 = \{v_1, v_2, v_3\}$, $S_5 = \{v_1, v_2\}$, dan $S_6 = \{v_1\}$, maka S_4 dan S_5 merupakan himpunan dominasi sedangkan S_6 bukan himpunan dominasi lokasi karena titik v_4 tidak memiliki tetangga berbeda di S_6. Bilangan dominasi dari contoh himpunan dominasi lokasi dibawah ini yaitu 2.



(c.) Graf S_4 (d.) Graf S_5

Gambar 2. 4 Contoh Himpunan Dominasi Lokasi

2.3 Hasil Terdahulu

Penelitian terdahulu tentang *locating-dominating codes* yang berjudul " *Applied Mathematics and Computation*" **[4]**. Penelitian tersebut memberikan parameter dominasi lokasi untuk beberapa keluarga graf. Selanjutnya penelitian terbaru yang berjudul "*On locating-dominating number of comb product graphs*" oleh Aswan dan Suhadi. **[8]** memberikan batasan untuk nilai bilangan dominasi lokasi pada hasil operasi *comb* untuk sembarang graf G dan H.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, peneliti tertarik untuk mengkaji teori dominasi lokasi dalam hasil operasi *comb* untuk sembarang G dan H. Dalam penelitian ini dipilih untuk G adalah graf lintasan P_m dan H adalah graf lintasan P_n. Proses awal penelitian ini yaitu menentukan dominasi dan dominasi lokasi yang memenuhi syarat dalam menentukan bilangan dominasi lokasi pada hasil operasi *comb* yang akan dikaji. Sehingga peneliti dapat mengetahui polanya.Untuk beberapa keluarga graf nilai bilangan dominasi dan dominasi lokasi sudah dapat ditentukan pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Tabel Parameter Dominasi Lokasi Beberapa Graf

G	γ	λ
$P_n, n \geq 3$	$[\frac{n}{3}]$	$[\frac{2n}{5}]$
$C_n, n \geq 6$	$[\frac{n}{2}]$	$[\frac{2n}{5}]$
$K_n, n \geq 1$	1	$n-1$
$K_{1,n-1}, n \geq 2$	1	$n-2$
$K_{r,n-r}, 1 \leq r \leq n-r$	2	$n-2$
$W_{1,n-1}, n \geq 7$	1	$[(2n-2)/5]$

Secara umum menggunkana diameter dari graf, penelitian oleh Aswan dan Suhadi **[8]** memberikan batasan untuk menentukan bilangan dominasi lokasi pada hasil operasi *comb* untuk sembarang graf G dan H melalui teorema berikut.

Teorema 2.1 Misalkan W adalah himpunan dominasi lokasi dari $P_m \rhd {}_{o}P_n$, maka

$$|W| \geq \gamma(G) + |\mathrm{V(G)}| \times (\lambda(\mathrm{H}) - 1)$$

Teorema2.2 Misalkan W^{-} adalah himpunan dominasi lokasi dari $P_n \setminus v_{io}$ maka,

$$\lambda(G \rhd {}_{o}H) = \begin{cases} \gamma(G) + |\mathrm{V(G)}| \times (\lambda(\mathrm{H}) - 1), & \exists W^{-}, |W^{-}| = \lambda(\mathrm{H}) - 1 \text{ dan } \exists W^{-}, |W^{-}| = \lambda(\mathrm{H}) - 1, \mathrm{N}(\mathrm{u}_o) \cap W^{-} \neq \emptyset \\ \lambda(\mathrm{G}) + |\mathrm{V(G)}| \times (\lambda(\mathrm{H}) - 1), & \exists W^{-}, |W^{-}| = \lambda(\mathrm{H}) - 1 \text{ dan } \forall W^{-}, |W^{-}| = \lambda(\mathrm{H}) - 1, \mathrm{N}(\mathrm{u}_o) \cap W^{-} = \emptyset \\ |\mathrm{V(G)}| \times \lambda(\mathrm{H}), & \forall W^{-}, |W^{-}| \neq \lambda(\mathrm{H}) - 1 \end{cases}$$