BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian – Penelitian Terdahulu

Penelitian – penelitian terdahulu yang terkait dengan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Sistem Antrian *Single Channel-Multiple Phase* dalam Meningkatkan Pelayanan Pembayaran Pajak Kendaraan Bermotor di Kantor Sistem Administrasi Manunggal Satu Atap (SAMSAT) Kota Palu [3].

   Kantor SAMSAT Kota Palu memiliki struktur antrian *Single Channel-Multiple Phase*. Data waktu kedatangan dan data waktu pelayanan diuji dengan menggunakan uji Statistika Non Parametrik *Kolmogorov-Smirnov*. Sehingga diperoleh bahwa model sistem antrian yang dapat diterapkan di SAMSAT kota Palu adalah M/M/3 : FCFS/∞/∞.

2. Analisis Model Antrian *Single Channel-Multi Phase* [4].

   Metode penelitian yang digunakan pada penelitian ini adalah *library research* atau studi pustaka dengan mengkaji beberapa sumber mengenai antrian, terutama *Single Channel-Multi Phase*. Data yang diolah merupakan data pelayanan servis kendaraan bermotor. Distribusi kedatangan dan distribusi pelayanan kemudian diuji dengan menggunakan uji Chi Kuadrat dan dianalisis dengan menggunakan model (M/M/1):(GD/∞/∞).

3. Analisis Antrian Dengan Model *Single Channel Single Phase* Service pada Stasiun Pengisian Bahan Bakar Umum (SPBU) I Gusti Ngurahrai Palu [5].

   Penelitian dilakukan dengan menganalisis sistem antrian di waktu tersibuk atau saat antrian yang panjang terjadi. Waktu pengamatan yaitu lima hari dari jam 09.00 – 11.00. Model yang digunakan adalah *Single Channel-Single Phase* dan distribusi data diuji menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov.

4. Optimalisasi Antrian Menggunakan Metode Single Channel Single Phase (Studi Kasus DR. Reksodiwiryo Padang) [6].

   Peneliti melakukan analisis sistem antrian di Rumah Sakit Tentara Padang dengan menghitung tingkat intensitas pelayanan, probabilitas, rata-rata panjang

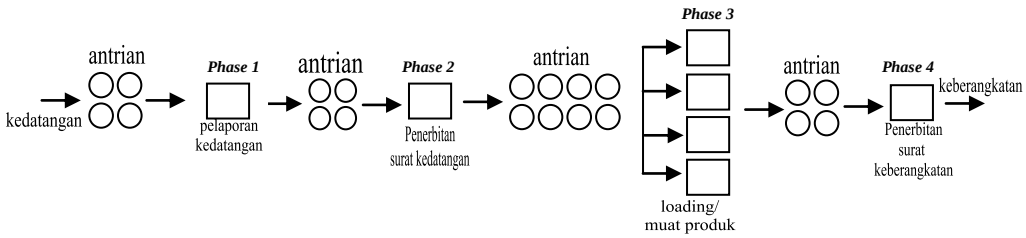
antrian dan rata-rata waktu tunggu pasien. Tingkat kedatangan diasumsikan berdistribusi poisson dengan model antrian yang digunakan adalah M/M/1.

5. Analisis Antrian Pada Pelayanan Jasa Gadai Studi Kasus Perum Pegadaian Cabang Condong Catur Yogyakarta [7].

   Penelitian dilakukan dengan mengamati sistem pelayanan yang diterapkan di Perum Pegadaian Cabang Condong Catur. Peneliti menganalisis dengan menggunakan model antrian *Single Channel-Multi Phase* yang dianggap sesuai dengan karakteristik kedatangan, antrian, dan fasilitas pelayanan. Proses pengamatan dilaksanakan pada waktu tersibuk pelayanan.

2.2 Definisi Sistem Antrian

Sistem antrian merupakan sebuah himpunan pelanggan, pelayanan dan suatu aturan yang mengatur kedatangan pelanggan dan sistem pelayanannya. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan yang berada dalam suatu fasilitas pelayanan, termasuk antriannya [1]. Sistem antrian termasuk ke dalam proses kelahiran-kematian, di mana kelahiran terjadi ketika seorang pelanggan memasuki sistem pelayanan dan kematian terjadi saat pelanggan tersebut meninggalkan sistem pelayanan [8].



Gambar 2. 1 Sistem Antrian PT Tirta Investama Tanggamus

Gambar 2.1 menunjukkan sistem antrian yang diterapkan di PT Tirta Investasma Tanggamus. Pada gambar, sistem antrian dimulai dengan kedatangan kendaraan di dalam antrian, terdapat empat tahap pelayanan yang harus dilewati oleh setiap kendaraan yaitu pelaporan kedatangan, penerbitan surat kedatangan, muat produk dan penerbitan surat keberangkatan.

2.3 Komponen Sistem Antrian

Terdapat enam komponen utama dalam menentukan sebuah sistem antrian pada fasilitas pelayanan [8]:

1. Pola Kedatangan

   Pola kedatangan adalah sebuah pola pendistribusian pelanggan selama proses memasuki sistem. Pola kedatangan terdiri atas *constant arrival distribution* (distribusi kedatangan konstan) yaitu pelanggan yang datang di setiap periode tertentu dengan pola tetap dan *arrival pattern random* yaitu pelanggan yang datang secara acak. Asumsinya kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi Poisson dengan waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial.

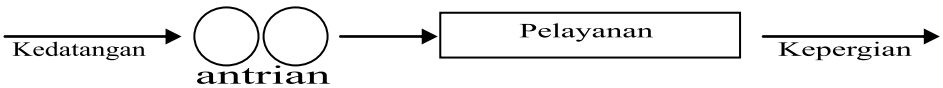
2. Pola Pelayanan

   Pola pelayanan ditentukan oleh waktu yang diperlukan fasilitas pelayanan untuk melayani pelanggan. Waktu pelayanan dalam suatu sistem dapat bergantung pada pelanggan yang berada di sistem namun dapat juga tidak bergantung pada keadaan tersebut.

3. Sistem Fasilitas Pelayanan

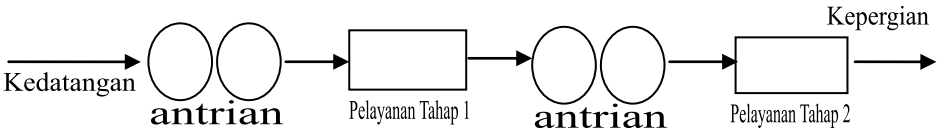
   Sistem fasilitas pelayanan akan membentuk suatu struktur antrian yang berbeda-beda. Struktur antrian ini terdiri atas saluran dan tahapan. Saluran merupakan jumlah jalur atau loket pelayanan yang tersedia dalam suatu sistem. Sedangkan tahapan bermakna jumlah tempat pelayanan yang harus dilalui oleh seorang pelanggan sehingga proses pelayanan disebut lengkap. Ada empat struktur antrian dasar yang mungkin terbentuk dalam suatu sistem antrian, yaitu:

   a. *Single Channel-Single Phase,* yaitu suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu saluran antrian dan satu tahapan pelayanan.



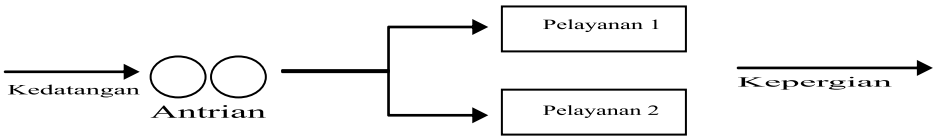
Gambar 2. 2 Struktur Antrian *Single Channel-Single Phase*

   b. *Single Channel-Multi Phase,* yaitu suatu bentuk antrian yang hanya terdapat satu saluran antrian dan dua atau lebih tahapan pelayanan.



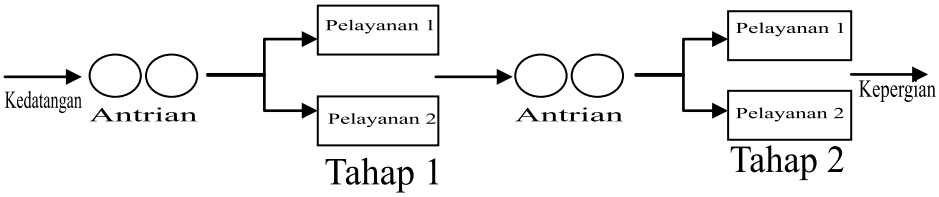
Gambar 2. 3 Struktur Antrian *Single Channel-Multi Phase*

c. *Multi Channel-Single Phase*, yaitu suatu bentuk antrian yang memiliki dua atau lebih saluran antrian dan hanya satu tahapan pelayanan.



Gambar 2. 4 Struktur Antrian *Multi Channel-Single Phase*

d. *Multi Channel-Multi Phase*, yaitu suatu bentuk antrian yang memiliki dua atau lebih saluran antrian maupun tahapan pelayanan.



Gambar 2. 5 Struktur Antrian *Multi Channel-Multi Phase*

4. Disiplin Antrian

Disiplin antrian adalah sebuah aturan antrian yang terdapat pada peraturan pelanggan dalam suatu barisan tertentu untuk menerima pelayanan yang terdiri dari:

a. *First Come First Serve* (FCFS) atau *First In First Out* (FIFO) merupakan disiplin antrian yang umum digunakan, yaitu keadaan saat pelanggan yang datang pertama akan dilayani terlebih dahulu.

b. *Last Come First Serve* (LCFS) atau *Last In First Out* (LIFO) merupakan disiplin antrian dengan ketentuan pelanggan yang terakhir datang akan mendapatkan pelayanan terlebih dulu.

c. *Priority Service* (PS) merupakan disiplin antrian dengan keadaan pelanggan dengan kepentingan lebih tinggi akan mendapatkan pelayanan lebih dulu meskipun pelanggan tersebut terakhir datang.

d. *Service in Random Order* (SIRO) merupakan disiplin antrian ketika pelanggan akan dilayani secara acak (*random*) tanpa memperhatikan urutan kedatangan pelanggan.

5. Kapasitas Sistem Pelayanan

   Kapasitas sistem merupakan jumlah maksimum pelanggan, baik sedang dilayani ataupun di dalam antrian, yang dapat ditampung oleh sistem pelayanan pada waktu yang sama. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam sistem pelayanannya disebut memiliki kapasitas tak terhingga, sedangkan sistem yang membatasi jumlah pelanggan di dalamnya dikatakan memiliki kapasitas berhingga.

6. Ukuran Sumber Pemanggilan

   Ukuran sumber pemanggilan menyatakan banyaknya pelanggan yang memerlukan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran ini dapat berhingga atau tidak berhingga. Sumber pemanggilan dikatakan berhingga ketika banyaknya pelanggan dalam sistem antrian memberikan pengaruh terhadap laju kedatangan pelanggan yang baru memasuki sistem.

2.4 Notasi Sistem Antrian

Pada pengelompokan struktur antrian yang berbeda-beda akan digunakan suatu notasi yang disebut dengan Notasi Kendall. Notasi ini umumnya digunakan karena notasi tersebut merupakan alat yang efisien untuk mengidentifikasi model-model antrian dan karakteristik di dalamnya. Notasi (a/b/c):(d/e/f) pertama kali dirancang oleh Kendall (1953) dalam bentuk (a, b, c, d) dan dikenal sebagai notasi Kendall. Kemudian, Lee (1966) menambahkan simbol d, e, dan f ke dalam notasi Kendall tersebut, sehingga dikenal sebagain notasi Kendall-Lee. Simbol-simbol a, b, c, d, e, dan f adalah unsur-unsur dasar notasi Kendall-Lee dengan keterangan sebagai berikut:

a : Pola Kedatangan

b : Pola Pelayanan

c : Jumlah Saluran Pelayanan

d : Disiplin Antrian

e : Kapasitas Sistem Pelayanan

f : Ukuran sumber pemanggil

Simbol pada notasi tersebut dinyatakan seperti pada tabel 2.1

Tabel 2. 1 Notasi Kendall (a/b/c):(d/e/f)

Karakteristik	Simbol	Keterangan
Untuk distribusi kedatangan dan waktu pelayanan	M	Markov (Distribusi Poisson dengan waktu berdistribusi eksponensial)
	D	Deterministik
	E_k	Erlang dengan k = 1,2,…
	G	Berdistribusi umum
Jumlah Saluran Pelayanan	1,2, …, c	
Kapasitas Sistem	1, 2, …, ∞	
Ukuran Sumber Pemanggilan	1, 2, …, ∞	
Disiplin Antrian	FCFS	Pertama datang, pertama dilayani
	LCFS	Terakhir datang, pertama dilayani
	SIRO	Pelanggan dilayani secara acak
	PS	Pelanggan dengan prioritas tinggi lebih dulu dilayani

2.5 Distribusi Kedatangan

Proses Poisson merupakan sebuah proses yang berdistribusi poisson, proses ini membantu mendeskripsikan kejadian-kejadian yang memiliki waktu kedatangan acak [8]. Pada umumnya, distribusi poisson digunakan untuk pemodelan kedatangan menjadi sebuah sistem antrian. Untuk setiap kedatangan, sebuah distribusi poisson diskrit dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$p_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \tag{2.1}$$

dengan x = 0,1,2,… dan λ > 0 konstan, sehingga nilai rata-rata (*mean*) dapat dihitung menggunakan persamaan sebagai berikut

$$E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} x p_x$$

$$E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[x] = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

Misalkan y = x-1, maka persamaan akan menjadi

$$E[x] = \lambda\, e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!}$$

Ingat kembali deret $1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ ... = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^m$, sehingga

$$E[x] = \lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$E[x] = \lambda \tag{2.2}$$

Untuk x^2 maka ekspektasi nilai x akan bernilai

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[x^2] = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

Misalkan y = x-1

$$E[x^2] = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} (y+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}$$

$$E[x^2] = \lambda \left(\sum_{x=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}\right)$$

$$E[x^2] = \lambda\, (\lambda\, e^{-\lambda} e^{\lambda} + e^{-\lambda} e^{\lambda})$$

$$E[x^2] = \lambda\, (\lambda + 1)$$

Maka variansi dari distribusi poisson adalah

$$Var(x) = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$Var(x) = \lambda\, (\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$Var(x) = \lambda \tag{2.3}$$

2.6 Distribusi Waktu Pelayanan

Pada sebuah sistem antrian, apabila pola kedatangan memiliki distribusi poisson maka waktu keberangkatan atau pelayanan akan memiliki distribusi eksponensial dengan parameter μ. Apabila diberikan fungsi massa peluang sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, untuk\ x > 0 \\ 0 \quad , x\ lainnya \end{cases} \tag{2.4}$$

Dan fungsi distributif akumulatifnya adalah

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\mu x} \tag{2.5}$$

2.7 Rantai Markov

Barisan dari variabel acak yang mendefinisikan pada satu ruang sampel yang sama disebut sebagai proses stokastik dan dinotasikan sebagai X_n dengan n adalah keadaan/*state* yang terjadi pada sistem di waktu ke-n. Proses stokastik X_n yang memiliki parameter waktu diskrit dan ruang kejadian diskrit akan disebut rantai markov jika untuk semua $n \geq 0$ dan $P(X_{n+1} = j|X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j|X_n = i_n) = P_{ij}$

Maka peluang berpindahnya keadaan i pada waktu n ke keadaan j pada waktu n+1 adalah P_{ij}. Peluang P_{ij} disebut sebagai peluang transisi dan umumnya diasumsikan bersifat independen. Matriks P yang terbentuk berdasarkan elemen dari P_{ij} dikenal sebagai matriks transisi.

$$P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & \ldots & P_{0j} \\ P_{10} & P_{11} & \ldots & P_{1j} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i1} & \ldots & P_{ij} \end{pmatrix}$$

2.8 Proses Kelahiran - Kematian

Sistem antrian merupakan sebuah proses kelahiran – kematian, di mana kelahiran bermakna kedatangan pelanggan dan kematian bermakna kepergian pelanggan. Proses kelahiran-kematian terdiri dari himpunan populasi dari beberapa sistem. Saat sistem berada dalam keadaan $n \geq 0$, maka waktu kedatangan (kelahiran) untuk kedatangan selanjutnya merupakan variable acak eksponensial dengan parameter λ_n, sistem akan bergerak dari n ke n+1. Pada saat sistem memiliki keadaan $n \geq 1$, waktu hingga keberangkatan selanjutnya (kematian) merupakan variable acak eksponensial dengan parameter μ_n, sistem berpindah dari keadaan n menjadi n-1.

Dalam keadaan *steady* atau tetap, nilai transisi yang keluar dari sistem sama dengan nilai transisi yang masuk ke dalam sistem, sehingga proses kelahiran-kematian dapat dituliskan sebagai berikut

$$(\lambda_n + \mu_n)p_n = \lambda_{n-1}\, p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} \qquad (n \geq 1)$$

Sistem diawali dengan keadaan 0, sehingga besar transisi dari $n-1$ ke n ($\lambda_{n-1}\, p_{n-1}$) harus sama dengan besar transisi dari n ke $n-1$ ($\mu_n p_n$).

$$\lambda_{n-1}\, p_{n-1} = \mu_n p_n$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\, p_{n-1} \qquad (n \geq 1) \qquad (2.6)$$

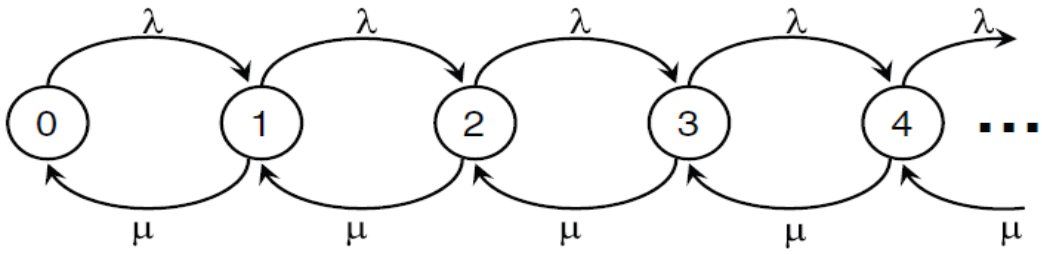
2.9 Keadaan *Steady*

Keadaan *Steady* atau s*teady-state* merupakan sebuah keadaan ketika suatu sistem antrian mencapai keseimbangan. Jika keadaan dalam suatu sistem dipengaruhi secara terus menerus oleh keadaan awal dan waktu yang telah dilaluinya, maka keadaan akan bersifat independen terhadap keadaan awal dan waktu yang dilalui tersebut. Saat keadaan tersebut tercapai, sebuah sistem antrian dapat dikatakan berada dalam kondisi yang disebut *steady*. Teori antrian pada umumnya cenderung memusatkan keadaan pada *steady-state* [4]. Saat sistem berada dalam waktu sibuk, nilai keadaan *steady* dihitung dengan $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$, λ adalah rata-rata kedatangan pelanggan dan μ merupakan rata-rata waktu pelayanan [9]. Keadaan *steady state* dapat terpenuhi apabila $\rho < 1$ yang berarti bahwa rata-rata jumlah pelanggan yang datang kurang dari rata-rata waktu pelayanan. Sedangkan $\rho > 1$ menyatakan kedatangan terjadi dengan kelajuan yang lebih cepat dari pada waktu pelayanan dan ρ akan bernilai sama dengan 1 ketika $\lambda = \mu$ [1].

2.10 Model Antrian

2.10.1 Model Antrian Satu Server (M/M/1)

Model antrian untuk sistem pelayanan satu server atau *single channel* yang digunakan adalah model M/M/1 dalam keadaan *steady*.



Gambar 2. 6 Diagram Transisi Model Antrian M/M/1
(Sumber : John F.Shortle, et.al, 2018)

Gambar 2.6 menjelaskan diagram perpindahan pada model antrian M/M/1, misalkan n adalah jumlah pelanggan dalam suatu sistem dengan asumsi kapasitas sistem pelayanan bernilai *infinite* (∞) dan tingkat kedatangan pelanggan λ adalah tetap, maka model antrian M/M/1 merupakan proses kelahiran-kematian dengan $\lambda_n = \lambda$ $(n \geq 0)$ dan $\mu_n = \mu$ $(n \geq 1)$.

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}$$

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

dengan $\{\lambda_n, n = 0,1,2,\ldots\}$ dan $\{\mu_n, n = 1,2,3, \ldots\}$

$$p_n = p_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad (2.7)$$

Untuk mendapatkan nilai p_0, ingat kembali bahwa total peluang dari p_n sama dengan 1, sehingga

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} p^n$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p^n}$$

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-p}}$$

$p_0 = 1 - p$, (misal p = $\frac{\lambda}{\mu}$ < 1)

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{2.8}$$

Sehingga peluang kejadian n untuk model M/M/1 adalah

$$p_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \tag{2.9}$$

Tingkat keefektifan suatu sistem dapat diukur dengan menggunakan angka harapan pada sistem dan angka harapan pada antrian dengan keadaan yang *steady*. Misalkan N merepresentasikan jumlah pelanggan dalam suatu sistem yang *steady* dan L merepresentasikan nilai harapan.

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} np^n$$

$$= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

$$= (1 - \frac{\lambda}{\mu})\ \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \times \frac{\mu}{\lambda}$$

Diperoleh,

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{2.10}$$

Sehingga dapat dituliskan:

1. Rata-rata pelanggan yang antri di dalam sistem adalah

   $L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

2. Rata-rata pelanggan yang antri dalam antrian adalah

   $L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\rho_n = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

3. Rata-rata waktu tunggu dalam antrian adalah

   $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$

4. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem adalah

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Untuk kejadian saat keadaan server hanya mampu menampung K pelanggan dalam sistem antrian, maka model antrian yang digunakan tentu berbeda dengan model antrian M/M/1/∞. Pada model antrian satu server M/M/1/K nilai peluang kedatangan pelanggan dapat dihitung dengan

$$p_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^n, (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1}, \ (\rho = 1) \end{cases} \tag{2.11}$$

$$p_0 = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, (\rho \neq 1) \\ \frac{1}{K+1}, \ (\rho = 1) \end{cases}$$

Sehingga,

1. Rata-rata pelanggan yang antri di dalam sistem adalah

   $$L_s = L_q + (1 - p_0)$$

2. Rata-rata pelanggan yang antri dalam antrian adalah

   $$L_q = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho(K\rho^K+1)}{1-\rho^{K+1}}, (\rho \neq 1) \\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)}, \ (\rho = 1) \end{cases}$$

3. Rata-rata waktu tunggu dalam antrian adalah

   $$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_{eff}}$$

   Dengan λ_{eff} akan bernilai sama dengan $\lambda(1\text{-}P_K)$. Nilai P_K dapat dihitung menggunakan persamaan 2.11 dengan nilai n = K.

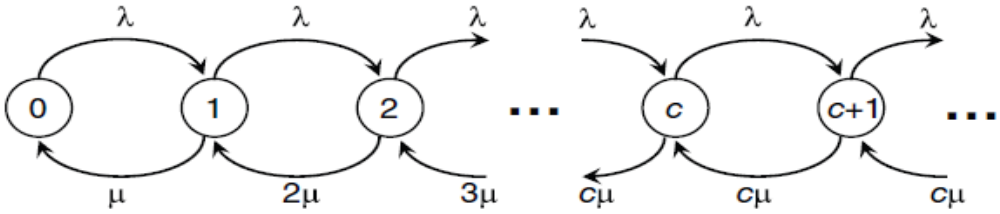
4. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem adalah

   $$W_s = \frac{L}{\lambda_{eff}} = \frac{L}{\lambda(1-pK)}$$

2.10.2 Model Antrian Multi Server (M/M/c)

Model antrian untuk sistem pelayanan multi server atau multi *channel* yang digunakan adalah M/M/c dengan kedatangan berdistribusi poisson, waktu

pelayanan berdistribusi eksponensial, dan bersifat independen. Pada model ini, sistem pelayanan yang dimiliki oleh suatu sistem terdiri atas beberapa sistem pelayanan. Proses perpindahan pelanggan pada sistem pelayanan model antrian M/M/c dijelaskan pada Gambar 2.7 berikut



Gambar 2. 7 Diagram Transisi Model Antrian M/M/c
(Sumber : John F.Shortle, et.al, 2018)

Ketika sistem berada pada keadaan tidak ada pelanggan berpindah ke keadaan satu pelanggan dalam sistem, maka laju kedatangan akan bernilai λ dan waktu pelayanan bernilai μ. Saat pelanggan kedua tiba, pelanggan tersebut akan memasuki server kedua dengan laju kedatangan bernilai yaitu λ dan waktu pelayanan bernilai 2μ. Waktu pelayanan akan bernilai sama dengan cμ ketika jumlah pelanggan yang dilayani memiliki jumlah lebih dari atau sama dengan jumlah server, atau lebih jelasnya sebagai berikut

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, (1 \leq n < c) \\ c\mu, \ (n \geq c) \end{cases} \tag{2.12}$$

Sehingga p_n untuk n pelanggan dalam sistem antrian adalah

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0, (0 \leq n < c) \\ \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\mu^n} p_0, \ (n \geq c) \end{cases} \tag{2.13}$$

Dapat dilihat bahwa p_n berdistribusi poisson untuk 0 ≤ n < c dan berdistribusi geometrik untuk n ≥ c. Untuk mencari nilai p_0 akan digunakan kondisi dengan total peluang sama dengan satu.

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\,\mu^n} \right)^{-1}$$

Misalkan $r = {}^{\lambda}/_{\mu}$ dan $\rho = {}^{r}/_{c} = {}^{\lambda}/_{c\mu}$, maka

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{r^n}{c^{n-c}c!}\right)^{-1}$$

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)}\right)^{-1} \left(\frac{r}{c} = \rho < 1\right) \qquad (2.14)$$

Selanjutnya untuk mencari tingkat keefektifan L_q dapat dituliskan sebagai berikut

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p_n = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)\frac{r^n}{c^{n-c}c!}p_0$$

$$L_q = \frac{r^c}{c!}p_0 \sum_{n=c+1}^{\infty} (n-c)p^{n-c} = \frac{r^c}{c!}p_0 \sum_{m=1}^{\infty} mp^m$$

$$L_q = \frac{r^c \rho p_0}{c!\,(1-\rho)^2}$$

$$L_q = \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\right)p_0 \qquad (2.15)$$

Sehingga dapat dituliskan:

1. Rata-rata pelanggan yang antri di dalam sistem adalah

   $L_s = r + \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\right)p_0$

2. Rata-rata pelanggan yang antri dalam antrian adalah

   $L_q = \left(\frac{r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\right)p_0$

3. Rata-rata waktu tunggu dalam antrian adalah

   $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2}\right)p_0$

4. Rata-rata waktu tunggu dalam sistem adalah

   $W_s = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{r^c}{c!(c\mu)(1-\rho)^2}\right)p_0$

2.11 Distribusi Data

Dalam mengidentifikasi distribusi dari data yang digunakan, akan dilakukan pengujian dengan menggunakan uji statistik non parametrik yaitu uji Kolmogorov-Smirnov.

1. Menentukan Hipotesis

Uji hipotesis dilakukan dengan menentukan hipotesis awal dari distribusi kedatangan

H_0 : Kedatangan kendaraan berdistribusi Poisson

H_1 : Kedatangan kendaraan tidak berdistribusi Poisson

Begitu juga dengan pengujian distribusi waktu pelayanan

H_0 : Waktu pelayanan kendaraan berdistribusi Eksponensial

H_1 : Waktu pelayanan kendaraan tidak berdistribusi Eksponensial

2. Menentukan taraf signifikansi

   Taraf signifikansi yang akan digunakan adalah α = 5% = 0.05

3. Uji Statistika

   Langkah pertama yang dilakukan adalah mengurutkan data mulai dari yang terkecil hingga terbesar. Pengurutan ini dilakukan untuk menghitung nilai distribusi frekuensi kumulatif sampel (Fs).

$$\text{Fs} = \frac{F\ kumulatif}{n}$$

   Dengan nilai rata-rata dari x serta standar deviasi dari sampel data yaitu

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

   Selanjutnya data ditransformasikan normal baku (Z)

$$Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$$

   Nilai transformasi normal baku yang diperoleh akan digunakan untuk mencari nilai dari Ft atau distribusi frekuensi teoritis dengan melihat nilai Z tersebut pada tabel normal Z. Untuk mendapatkan nilai uji statistik, dilakukan perhitungan dengan mencari nilai D [10].

   D = $max\ |Fs - Ft|$

4. Kriteria Pengujian

   Nilai D yang diperoleh pada uji statistik akan dibandingkan dengan nilai k pada tabel Kolmogorov-Smirnov, jika D memiliki nilai lebih besar dari k (D > K) maka H_0 akan ditolak [10].