

## BAB II

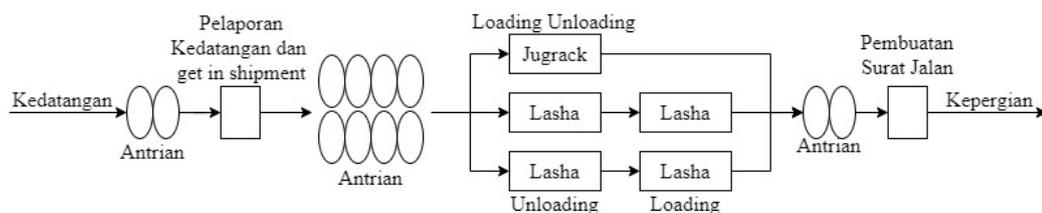
### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Teori Antrian

##### 2.1.1 Konsep Dasar Teori Antrian

Teori antrian dikemukakan dan dikembangkan oleh AK. Erlang, seorang insinyur Denmark, pada tahun 1910. Proses antrian dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai sumber masukan yang dapat berupa orang, barang, atau komponen lainnya. Proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut setelah dilayani. Sedangkan sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan [12]

Berikut ini merupakan Gambar 2.1 yang menggambarkan sistem antrian PT Tirta Investama Tanggamus



Gambar 2. 1 Sistem antrian PT Tirta Investama Tanggamus

Penerapan teori antrian dapat menyelesaikan berbagai masalah diantaranya terdapat dalam beberapa penelitian terdahulu, seperti berikut ini:

1. Analisis Antrian *Multi Channel Multi Phase* Pada Antrian Pembuatan Surat Izin Mengemudi Dengan Model Antrian  $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$  [7]

Setelah melalui proses pengumpulan data, perhitungan dan pengolahan data menggunakan model antrian  $(M/M/c):(GD/\infty/\infty)$ , dengan pola kedatangan pemohon SIM berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan pemohon SIM berdistribusi eksponensial. Kinerja sistem antrian pembuatan SIM di Poltabes kota Pontianak dapat dikatakan sudah efektif, karena *steady state* disetiap tahap kurang dari 1 dengan rata-rata waktu tunggu dalam antrian 21,6 menit dan dalam sistem 70,2 menit. Probabilitas tidak adanya pemohon SIM baru di tahap pertama yaitu 0,27, di tahap ke dua 0,30, di tahap ke tiga 0,11, di tahap ke empat 0,04 dan di tahap ke lima 0,58.

2. Analisis Sistem Antrian *Multi Channel - Multi Phase* Pada Kantor Badan Penyelenggara Jaminan Sosial (BPJS) Regional I Medan [8]

Pada pelayanan tahap pertama telah optimal menggunakan dua loket dengan memenuhi *steady-state* 0,61. Pada pelayanan tahap kedua dengan empat loket telah optimal dengan *steady-state* 0,35, tetapi berdasarkan simulasi dengan menggunakan software POM-QM for Windows jumlah loket minimalnya sebanyak dua loket dengan *steady-state* 0,69. Pada pelayanan tahap ketiga tidak optimal dengan menggunakan dua loket dikarenakan *steady-state* 1,19, berdasarkan simulasi dengan menggunakan software POM-QM for Windows diperoleh jumlah loket optimalnya adalah tiga *server*. Perbedaan dengan peneliti ini terletak pada penggunaan rumus dan pengukuran optimalisasi jumlah pelayanan pada sistem. Perbedaan dengan peneliti ini terletak pada pengukuran optimalisasi untuk menentukan jumlah pelayanan yang optimal pada sistem.

3. Penerapan Sistem Antrian Registrasi Dengan Metode *Multi Channel-Multi Phase* [9]

Penerapan model antrian *multi channel – multi phase* membuat aplikasi dapat melayani lebih dari satu jenis layanan di rumah sakit dan dengan jalur masuk yang banyak yang dapat disesuaikan dengan jenis dan jumlah unit pelayanan. Aplikasi antrian ini juga dilengkapi dengan pemanggil suara seperti aplikasi antrian yang telah ada saat ini dan bisa

dilakukan perubahan atau penambahan jumlah dan jenis layanan sewaktu-waktu sesuai kebutuhan rumah sakit. Perbedaan dengan peneliti ini terletak yaitu lokasi penelitian dan jenis metode yang dilakukan bukan hanya *Multi Channel-Multi Phase*.

4. Analisis Sistem Antrian Model *Multi Phase-Multi Channel* Pada Sentra Pelayanan Kios 3 In 1 Bbplk Semarang [10]

Analisis penerapan model sistem antrian *Multi Chanel-Multi Phase* pada sentra pelayanan kios 3 in 1 dan berdasar dari hasil analisis deskriptif pada nomor 1, interpretasinya agar didapatkan solusi optimal sehingga pelayanan lebih efektif dan efisien serta mengurangi waktu tunggu dari pelanggan maka perlu ditambahkan beberapa loket, masing-masing satu loket pada pelayanan registrasi/pendaftaran pelatihan dan loket penempatan dengan model antrian  $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ , satu loket pada pelayanan administrasi pelatihan sumber dana DIPA dengan model antrian  $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$  serta pembinaan dan konsultasi baik instansi pemerintah maupun lembaga swasta dengan model antrian  $(M/M/2):(GD/\infty/\infty)$ . Perbedaan dengan peneliti ini terletak pada penggunaan rumus dan lokasi penelitian yang dilakukan.

5. Analisis Sistem Antrian *Multi-Channel* Dan *Multi-Phase* Pada *Commuter Line Single Trip* [11]

Penelitian ini melakukan analisis sistem pelayanan di Stasiun Tangerang. Sebanyak empat skenario dikembangkan untuk mendapatkan konfigurasi sistem layanan yang optimal menggantikan sistem *existing*. Penelitian ini merekomendasikan perubahan konfigurasi sistem layanan di stasiun Tangerang yang dapat menurunkan biaya sistem pelayanan. Perbedaan dengan peneliti ini terletak pada lokasi penelitian dan metode yang digunakan bukan hanya *Multi-Channel* Dan *Multi-Phase*.

### 2.1.2 Proses Antrian

Proses antrian merupakan suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum dapat dilayani, dilayani dan akhirnya meninggalkan

fasilitas tersebut sesudah dilayani. Sistem antrian adalah suatu himpunan pelanggan, pelayanan dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan. Sedangkan keadaan sistem menunjuk pada jumlah pelanggan yang berada dalam suatu fasilitas pelayanan, termasuk dalam antriannya. Salah satu populasi adalah jumlah pelanggan yang datang pada fasilitas pelayanan. Besarnya populasi merupakan jumlah pelanggan yang memerlukan pelayanan.

Dalam proses antrian, banyaknya populasi dibedakan menjadi dua, yaitu populasi terbatas (*finite*) dan populasi tidak terbatas (*infinite*). Populasi terbatas dapat ditemukan pada suatu perusahaan yang mempunyai sejumlah mesin yang memerlukan perawatan atau perbaikan pada periode tertentu. Populasi yang tidak terbatas merupakan pelanggan yang tidak terhingga, contohnya dapat dilihat pada supermarket yang setiap harinya melayani pelanggan yang datang secara random dan tidak dapat ditentukan jumlahnya sehingga disebut populasi yang tidak terbatas. Dalam sistem antrian ada lima komponen dasar yang harus diperhatikan penyedia fasilitas pelayanan dapat melayani para pelanggan yang berdatangan, yaitu [12] :

1. Bentuk kedatangan para pelanggan
2. Bentuk fasilitas pelayanan
3. Jumlah pelayanan atau banyaknya tempat servis

### **2.1.3 Faktor Sistem Antrian**

Terdapat beberapa faktor penting yang terkait erat dengan sistem antrian. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap barisan antrian dan pelayanan adalah sebagai berikut [12]:

1. Distribusi Kedatangan
2. Distribusi Waktu Pelayanan
3. Fasilitas Pelayanan
4. Disiplin Antrian
5. Ukuran Dalam Antrian
6. Sumber Pemanggilan Notasian

#### 2.1.4 Notasi Antrian

Notasi baku dalam memodelkan sistem antrian atau dikenal sebagai notasi Kendall digunakan untuk merinci ciri dari suatu antrian [12]. Secara umum, model antrian dapat dibentuk dari notasi Kendall,  $(a/b/c):(d/e/f)$  dimana:  $a$  merupakan bentuk distribusi kedatangan/ *input* distribusi,  $b$  adalah bentuk distribusi pelayanan/ keberangkatan atau *Output* distribusi,  $c$  adalah jumlah jalur/ fasilitas pelayanan dalam sistem atau jumlah *channel*,  $d$  adalah disiplin pelayanan,  $e$  adalah jumlah pelayanan maksimum yang diijinkan dalam sistem, dan  $f$  adalah besarnya populasi masukan/ sumber kedatangan.

Huruf  $a$ , dan  $b$  dapat diganti dengan menggunakan kode M (Markov), D (Deterministik), Ek (Erlang), G (General). M mendefinisikan bahwa pola kedatangan berdistribusi Poisson atau pola waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial. D mendefinisikan pola kedatangan atau waktu pelayanan tetap atau konstan. Ek mendefinisikan bahwa pola kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi erlang. G mendefinisikan probabilitas distribusi lainnya. Huruf  $c$  dapat diganti dengan angka jumlah fasilitas pelayanan yang tersedia. Huruf  $d$  merupakan simbol untuk disiplin pelayanan dapat disubstitusi dengan kode FIFO (*First In First Out*), LIFO (*Last In First Out*), SIRO (*Service In random Order*), GD (*General service Disciplint*) dan PS (*Priority Service*). Sementara untuk  $e$  dan  $f$  dapat digunakan kode N yang menyatakan satuan yang terbatas dan yang menyatakan satuan yang tidak terbatas sebagai pengganti [7]. Terdapat unsur-unsur dasar dari model baris antrian yang telah dikenal secara universal, yaitu [12]:

$(a/b/c) : (d/e/f)$

a : distribusi kedatangan (*Arrival Distribution*)

b: distribusi waktu pelayanan atau keberangkatan (*Service Time Departure*)

c : jumlah fasilitas pelayanan ( $c = 1, 2, 3, \dots$ )

d : disiplin antrian , seperti FCFS, LCFS, atau SIRO

e : jumlah maksimum yang diizinkan dalam sistem

f : jumlah pelanggan yang ingin memasuki sistem sebagai sumber

Tabel 2.2 Notasi Kendall (a/b/c):(d/e/f)

Karakteristik	Simbol	Keterangan
Untuk distribusi kedatangan (a) dan distribusi waktu pelayanan (b)	M	Markov (pola kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu pelayanan berdistribusi eksponensial)
	D	Deterministik
	$E_k$	Erlang dengan $k = 1, 2, \dots$
	G	Berdistribusi umum
Jumlah Saluran Pelayanan (c)	1, 2, ..., c	
Disiplin Antrian (d)	FCFS	Pertama datang, pertama dilayani
	LCFS	Terakhir datang, pertama dilayani
	SIRO	Pelanggan dilayani secara acak
	PS	Pelanggan dengan prioritas tinggi lebih dulu dilayani
Kapasitas Sistem (e)	1, 2, ..., $\infty$	
Ukuran Sumber Pemanggilan (f)	1, 2, ..., $\infty$	

## 2.2 Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan para pelanggan biasanya diperhitungkan oleh waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Distribusi kedatangan ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang berada dalam sistem ataupun tidak bergantung pada keadaan sistem tersebut. Distribusi ini dapat deterministik (diketahui secara pasti), atau berupa suatu variabel acak yang distribusi peluangnya dianggap telah diketahui.

Bila distribusi kedatangan tidak disebut secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba satu per satu. Asumsinya adalah kedatangan pelanggan mengikuti suatu proses dengan distribusi peluang tertentu. Distribusi peluang

yang sering digunakan adalah distribusi Poisson karena kedatangan bersifat bebas dan tidak terpengaruh oleh kedatangan sebelum ataupun sesudahnya. Asumsi dari distribusi peluang Poisson ini adalah kedatangan pelanggan sifatnya acak dan mempunyai rata-rata kedatangan sebesar lamda ( $\lambda$ ) [12].

### 2.2.1 Proses Poisson

Proses Poisson memfokuskan peubah acak  $x$  yang menghitung antara lain jumlah kejadian kedatangan kendaraan yang terjadi dalam interval waktu tertentu [13]. Distribusi poisson digunakan untuk pemodelan kedatangan menjadi sebuah sistem antrian. Untuk setiap kedatangan, sebuah distribusi poisson diskrit dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$f(x; \lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad (2.1)$$

dengan  $x = 0, 1, 2, \dots$  dan  $\lambda > 0$  konstan, dengan nilai rata-rata (*mean*)

$$\begin{aligned} E[x] &= \sum_{x=0}^{\infty} x p_n \\ E[x] &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ E[x] &= \lambda \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \end{aligned}$$

misalkany  $= x - 1$ , maka persamaan akan menjadi

$$E[x] = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y}$$

ingat kembali deret  $1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{3}{3!} + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{m^x}{x!} = e^m$ , sehingga

$$\begin{aligned} E[x] &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\ E[x] &= \lambda \end{aligned} \quad (2.2)$$

untuk  $x^2$  maka ekspektasi nilai  $x$  akan bernilai

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E[x^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

misalkan  $y = x - 1$

$$E[x^2] = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} (y+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

$$E[x^2] = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} + \sum_{x=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!}$$

$$E[x^2] = \lambda(\lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} + e^{-\lambda} e^{\lambda})$$

$$E[x^2] = \lambda(\lambda + 1)$$

maka variansi dari distribusi poisson adalah

$$Var(x) = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$Var(x) = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2$$

$$Var(x) = \lambda \tag{2.3}$$

### 2.2.2 Proses Eksponensial

Distribusi probabilitas distribusi waktu pelayanan dapat juga sesuai dengan salah satu distribusi probabilitas Eksponensial. Variabel random kontinu  $x$  berdistribusi eksponensial dengan parameter  $\tau$  dimana  $\tau > 0$  jika fungsi densitas probabilitasnya adalah [12] :

$$f(x) = \begin{cases} \tau e^{-\tau x}, & \text{untuk } \tau > 0 \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases} \tag{2.4}$$

dan kumulatif distribusinya

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\tau x}, & \text{untuk } x > 0 \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases} \tag{2.5}$$

### 2.3 Proses Kelahiran – Kematian

Proses kelahiran dan kematian (*birth-death processes*) merupakan proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian. Kelahiran terjadi jika suatu kendaraan distributor memasuki sistem antrian dan kematian terjadi jika kendaraan distributor meninggalkan sistem antrian. Proses kelahiran-kematian terdiri dari himpunan populasi dari beberapa sistem. Saat sistem berada dalam

keadaan  $n \geq 0$  maka waktu kedatangan (kelahiran) untuk kedatangan selanjutnya merupakan variabel acak eksponensial dengan parameter  $\lambda_n$ , sistem akan bergerak dari  $n$  ke  $n + 1$ .

Pada saat sistem memiliki keadaan  $n \geq 1$  waktu hingga keberangkatan selanjutnya (kematian) merupakan variabel acak eksponensial dengan parameter  $\mu_n$ , sistem berpindah dari keadaan  $n$  menjadi  $n - 1$ . Dalam keadaan *steady* atau tetap, nilai transisi yang keluar dari sistem sama dengan nilai transisi yang masuk ke dalam sistem, sehingga proses kelahiran-kematian dapat dituliskan sebagai berikut

$$(\lambda_n + \mu_n)p_n = \lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} \quad (n \geq 1)$$

Sistem diawali dengan keadaan 0, sehingga besar transisi dari  $n - 1$  ke  $n$   $\lambda_{n-1}P_{n-1}$  harus sama dengan besar transisi dari  $n$  ke  $n - 1$  ( $\mu_n p_n$ )

$$\begin{aligned} \lambda_{n-1}P_{n-1} &= \mu_n p_n \\ p_n &= \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.4 Sistem Antrian *Steady-state*

Asumsi *steady-state* terpenuhi apabila  $\lambda < \mu$  atau  $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$ . Berdasarkan informasi tersebut dapat dihitung ukuran-ukuran kinerja antara lain jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem ( $L_s$ ), jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian ( $L_q$ ), waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem ( $W_s$ ), dan waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian ( $W_q$ ) [14]. Kondisi *steady-state* harus dipenuhi sehingga dapat diketahui bahwa rata-rata jumlah pelayanan mencapai stabilitas. Untuk mencapai keadaan *steady-state*, maka [8]:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1 \quad (2.7)$$

dengan,

$\rho$  = keadaan *steady-state*

$\mu$  = rata-rata keberangkatan

$\lambda$  = rata-rata kedatangan

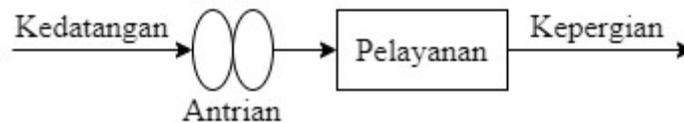
$c$  = jumlah server

## 2.5 Struktur Antrian

Struktur antrian terbagi dalam beberapa model antara lain [15] :

### 1. *Single Channel - Single Phase*

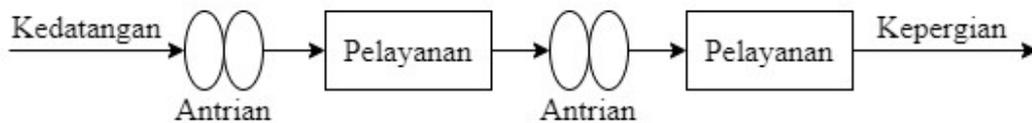
*Single channel* merupakan sistem pelayanan yang memiliki satu jalur atau satu pelayanan. Sedangkan *single phase* adalah hanya memiliki satu stasiun pelayanan sehingga setelah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian.



Gambar 2. 2 *Single channel - single phase*

### 2. *Single Channel - Multi Phase*

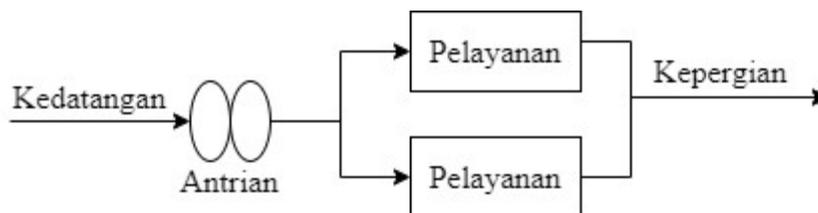
*Single channel - multi phase* atau jalur tunggal beberapa tahap pelayanan yaitu sistem antrian yang hanya ada satu jalur antrian namun ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan.



Gambar 2. 3 *Single channel - multi phase*

### 3. *Multi Channel - Single Phase*

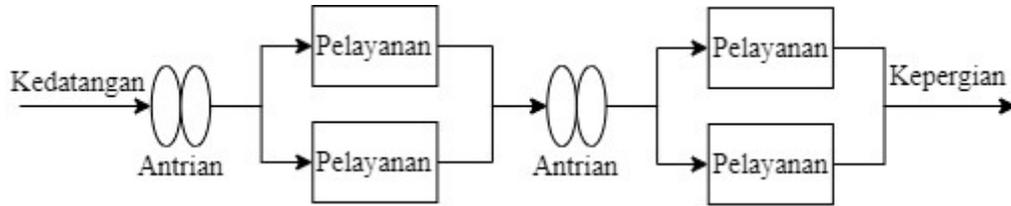
*Multiple channel - single phase* atau jalur ganda satu tahap pelayanan yaitu sistem yang hanya terdapat satu jalur antrian dengan dua atau lebih fasilitas pelayanan.



Gambar 2. 4 *Multi channel - single phase*

### 4. *Multi Channel - Multi Phase*

*Multiple channel - multi phase* atau jalur ganda beberapa tahap pelayanan yaitu sistem yang terdapat beberapa jalur antrian dengan beberapa tahap pelayanan.



Gambar 2. 5 *Multi channel - multi phase*

## 2.6 Model-model Antrian

### 2.6.1 Model Antrian Tunggal (M/M/1) : (FCFS/n/∞)

Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak bergantung pada jumlah sistem pelayanan tersebut, yaitu  $\lambda_n = \lambda$  untuk semua  $n$ , dengan demikian pula pelayanan tunggal dalam sistem tersebut menyelesaikan pelayanan dengan kecepatan konstan, yaitu  $\mu_n = \mu$  untuk semua  $n$ . Akibatnya, model ini memiliki kedatangan dan keberangkatan Poisson dengan mean  $\lambda$  dan  $\mu$ . Didefinisikan probabilitas untuk  $n$  pelanggan, yaitu [16] :

$$P_n = p^n \times P_0, n = 0,1,2, \dots$$

Jika mengasumsikan bahwa  $\rho < 1$ , maka

$$P_0 = \frac{1 - \rho}{(1 - \rho^{(k+1)})} \quad (2.8)$$

Oleh karena itu diperoleh rumus umum berikut ini :

$$P_n = P_0 \times \rho^k, k = 0,1,2, \dots \quad (2.9)$$

Dalam menentukan laju kedatangan kendaraan distributor digunakan rumus sebagai berikut [4] :

$$\lambda = \frac{N}{t} \quad (2.10)$$

dengan

N = Jumlah kendaraan distributor

t = Jumlah waktu antar kedatangan

Dalam menentukan laju pelayanan kendaraan distributor ditentukan menggunakan rumus sebagai berikut [4]:

$$\mu = \frac{N}{t} \quad (2.11)$$

dengan

N = Jumlah kendaraan distributor

dengan

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.12)$$

Selanjutnya akan diuraikan ukuran-ukuran kinerja sistem antrian model ini :

a. Jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem ( $L_s$ )

$$L_s = L_q + (1 - P_0) \quad (2.13)$$

b. Jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian ( $L_q$ )

$$L_q = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho(K\rho^K + 1)}{1 - \rho^{K+1}} \quad (2.14)$$

c. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem ( $W_s$ )

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1 - \rho)} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2.15)$$

d. Waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian ( $W_q$ )

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad (2.16)$$

### 2.6.2 Model Antrian Majemuk (M/M/k) : (FCFS/n/∞)

Dalam model multi server diberikan asumsi sebagai berikut:

1. Semua pelayanan per unit waktu adalah sama,
2. Rerata kedatangan dan rerata pelayanan mengikuti distribusi Poisson atau distribusi Eksponensial,
3. Pelayanan dilakukan atas dasar FCFS.

Keterangan atas simbol-simbol yang dipakai adalah sebaga berikut:

- a.  $P_n$  = Probabilitas dari n pelanggan dalam sistem
- b. k = Jumlah server (*channel*)
- c.  $\mu$  = Rata- rata laju pelayanan (unit/waktu)
- b.  $\lambda$  = rata-rata laju kedatangan (unit/waktu)

Persamaan yang digunakan untuk model ini adalah [12]

- a. Probabilitas server menganggur

$P_0$  adalah probabilitas tidak ada pelayanan di *station*, maka

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} \frac{1}{1 - \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)}} \quad (2.22)$$

c. Probabilitas server sibuk

$$P[n > k] = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0}{k! \left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)} \quad (2.23)$$

d. Jumlah rata-rata yang menunggu dalam antrian adalah

$$L_q = \frac{\frac{\lambda^{k-1}}{\mu} P_0}{k \cdot k! \left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \quad (2.24)$$

e. Jumlah rata-rata yang menunggu dalam sistem antrian adalah

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad (2.25)$$

f. Rata-rata waktu tunggu dalam antrian adalah

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \quad (2.26)$$

g. Rata-rata jumlah waktu menunggu dalam sistem antrian adalah

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad (2.27)$$

## 2.7 Karakteristik Antrian

Sumber karakteristik yang menghadirkan kedatangan pelanggan bagi sebuah sistem pelayanan memiliki tiga komponen karakteristik dalam sistem antrian yaitu sebagai berikut [17]:

### 2.7.1 Karakteristik Kedatangan

Karakteristik kedatangan pelanggan bagi sebuah sistem pelayanan memiliki karakteristik yaitu ukuran populasi, perilaku kedatangan, pola kedatangan yang dijelaskan sebagai berikut:

a. Ukuran Populasi

Ukuran populasi yaitu sumber konsumen atau sumber kedatangan dalam sistem antrian. Ukuran populasi terdiri dari populasi yang tidak terbatas merupakan jumlah kedatangan atau pelanggan pada sebuah waktu tertentu hanyalah sebagian kecil dari semua kedatangan yang potensial sedangkan populasi yang terbatas adalah sebuah antrian ketika ada pengguna pelayanan yang potensial dengan jumlah terbatas.

b. Perilaku Kedatangan

Perilaku kedatangan adalah perilaku konsumen yang berbeda-beda dalam memperoleh pelayanan. Perilaku kedatangan terdiri dari Pelanggan yang sabar, mesin atau orang-orang yang menunggu dalam antrian hingga dilayani yang tidak berpindah dalam garis antrian, Pelanggan yang menolak tidak mau bergabung dalam antrian karena merasa terlalu lama waktu yang dibutuhkan untuk dapat memenuhi kebutuhannya dan Pelanggan yang membelot adalah pelanggan yang berada dalam antrian akan tetapi menjadi tidak sabar dan meninggalkan antrian tanpa melengkapi transaksi mereka.

c. Pola Kedatangan

Pola Kedatangan adalah menggambarkan bagaimana distribusi pelanggan dalam memasuki sistem. Pola kedatangan terdiri dari *Constant arrival distribution* adalah pelanggan yang datang setiap periode tertentu sedangkan *Arrival pattern random* adalah pelanggan yang datang secara acak.

### 2.7.2 Disiplin Antrian

Disiplin antrian merupakan aturan antrian yang terdapat pada peraturan pelanggan yang ada didalam barisan untuk menerima pelayanan yang terdiri dari :

a. *First Come First Serve* (FCFS) yaitu disiplin antrian yang digunakan di beberapa tempat dimana pelanggan yang datang pertama akan dilayani terlebih dahulu.

Contoh: bioskop, bank, dan lain-lainya.

- b. *Last Come First Serve (LCFS)* yaitu disiplin antrian dimana pelanggan yang terakhir datang mendapatkan pelayanan lebih dahulu.  
Contoh: sistem antrian dalam elevator (*lift*) untuk lantai yang sama dan pembongkaran barang dari truk.
- c. *Shortest Operation Times (SOT)* yaitu sistem pelayanan dimana pelanggan yang membutuhkan waktu pelayanan tersingkat mendapatkan pelayanan pertama.  
Contoh: Unit Gawat Darurat (UGD).
- d. *Service in Random Order (SIRO)* yaitu sistem pelayanan dimana pelanggan mungkin akan dilayani secara acak (*random*), tidak peduli siapa yang lebih dahulu tiba untuk dilayani.  
Contoh: arisan, pencabutan hadiah undian.

### 2.7.3 Komponen Antrian

Dalam suatu sistem antrian terdapat komponen-komponen sebagai berikut :

- a. Tingkat kedatangan ( $\lambda$ ) adalah jumlah kendaraan atau manusia yang bergerak menuju satu atau beberapa tempat pelayanan dalam satu satuan waktu tertentu, biasa dinyatakan dalam satuan kendaraan / jam atau orang / menit.
- b. Tingkat pelayanan ( $\mu$ ) adalah jumlah kendaraan atau manusia yang dapat dilayani oleh satu tempat pelayanan dalam satu satuan waktu tertentu, biasa dinyatakan dalam satuan kendaraan/jam atau orang/menit. Selain tingkat pelayanan, juga dikenal waktu pelayanan (WP) yang dapat didefinisikan sebagai waktu yang dibutuhkan oleh satu tempat pelayanan untuk dapat melayani satu kendaraan atau satu orang, biasa dinyatakan dalam satuan detik/kendaraan atau menit/orang.
- c. Disiplin antrian FIFO sangat sering digunakan di bidang transportasi dimana orang atau kendaraan yang pertama tiba pada suatu tempat pelayanan akan dilayani pertama kali. Sebagai contoh disiplin FIFO adalah antrian kendaraan yang terbentuk di depan pintu gerbang tol, atau

antrian manusia pada loket pembayaran listrik atau telepon, loket pembayaran bank, dan lain-lainnya.

## 2.8 Distribusi Data

Pengujian Kolmogorov-Smirnov merupakan salah satu uji perbandingan dalam statistik non-parametrik. Pengujian ini dapat dinyatakan sebagai suatu cara untuk menguji “apakah terdapat perbedaan yang signifikan antara observasi distribusi frekuensi dengan teoritis distribusi frekuensi” [12].

Pengujian normal multivariat dilakukan dengan pendekatan uji *Kolmogorov-Smirnov*. Uji normal secara formal dengan uji *Kolmogorov-Smirnov* dapat dilakukan dengan mengikuti prosedur sebagai berikut:

1. Menentukan hipotesis :

Hipotesis awal dari distribusi kedatangan

$H_0$  : Kedatangan kendaraan berdistribusi Poisson

$H_1$  : Kedatangan kendaraan tidak berdistribusi Poisson

Hipotesis dari distribusi waktu pelayanan

$H_0$  : Waktu pelayanan kendaraan berdistribusi Eksponensial

$H_1$  : Waktu pelayanan kendaraan tidak berdistribusi Eksponensial

2. Menentukan taraf signifikansi

Menggunakan taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$  (0,05)

3. Statistik Uji :

Langkah-langkahnya sebagai berikut :

1. Urutkan data dari yang terkecil sampai yang terbesar, kemudian tentukan frekuensi ( $f_i$ ) dari setiap pengamatan ( $x_i$ )
2. Tentukan frekuensi kumulatif ( $fku_i$ ), kemudian hitung distribusi frekuensi kumulatif sampel

$$f_s(x_i) = \frac{fkum_i}{n} \quad (2.28)$$

3. Mencari nilai rata-rata dari  $x$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (2.29)$$

Dengan standar deviasi dari sampel data

$$S = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \underline{x})^2}{n - 1}} \quad (2.30)$$

4. Untuk setiap pengamatan  $(x_i)$ , kemudian tentukan transformasi normal baku  $(z_i)$

$$Z_i = \frac{x_i - \underline{x}}{s} \quad (2.31)$$

5. Tentukan nilai D

$$D = \sup [S(x) - F_0(x)] \quad (2.32)$$

Dengan  $S(x)$  : fungsi distribusi empiris

$S(x)$  : fungsi distribusi yang dihipotesiskan

4. Kriteria Uji :

Tolak  $H_0$  pada taraf signifikansi  $\alpha = 5\%$  jika nilai  $D > D^*(\frac{\alpha}{2}; N)$  dengan

$D^*(\frac{\alpha}{2}; N)$  adalah titik kritis dari tabel *Kolmogorov-Smirnov*.