BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini kita terlebih dahulu diberikan teori mengenai Gelombang, Harmonik, Hukum Kekekalan massa, dan Hukum Kekekalan Momentum.

2.1 Gelombang Harmonik

Gerak harmonik adalah sebuah kajian yang penting dalam bidang teknik, elektronika, geofisika, dan lain-lain. Banyak gejala yang bisa dijelaskan melalui pemahaman yang baik tentang Gerak harmonik ini dan gelombang pada umumnya [6]. Setiap pergerakan yang dapat terjadi berulang kali dalam selang waktu yang sama dapat disebut gerak periodik. Karena pergerak terjadi secara teratur maka disebut juga sebagai gerak harmonik yaitu pergerak periodik dengan lintasan yang ditempuh selalu sama (tetap) dan mempunyai persamaan gerak dalam bentuk sinusoidal dan digunakan untuk menganalisis suatu gerak periodik tertentu(Intan, 2012).

Untuk mendapatkan kecepatan gelombang sinusoidal disuatu posisi x maka, dalam fungsi gelombang $y(x,t)$ dapat diturunkan terhadap t dengan mempertahankan x yaitu konstan. Jika fungsi gelombang tersebut dimisalkan dengan:

$$y(x,t) = A\sin(\omega t - kx)$$

Maka

$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = A\omega\cos(\omega t - kx)$$

Dengan laju kecepatan maksimumnya adalah $A\omega$ yang dapat lebih besar, lebih kecil, atau sama dengan laju gelombang u bergantung pada amplitudo dan frekuensi gelombang (Young & Freedman, 2003).

Untuk tinggi permukaan gelombang harmonik pada koordinat horizontal dimisalkan dalam η dengan mengasumsikan permukaan bentuk gelombang yang memiliki amplitudo yaitu A, bilangan gelombang yaitu k, dan frekuensi gelombang yaitu ω, dapat dinyatakan sebagai persamaan berikut:

$$\eta(x,t) = Ae^{-i(kx-\omega t)}$$

2.2 Hukum Kekekalan Massa

Lavoisier menyimpulkan dalam suatu hukum kekekalan massa "Dalam sistem tertutup, massa zat sebelum dan sesudah reaksi adalah sama". Maka dapat disimpulkan bahwa hukum kekekalan massa atau dikenal juga sebagai Hukum Lomonosov-Lavoiser adalah suatu hukum yang menyatakan massa dari suatu sistem tertutup akan konstan meskipun terjadi berbagai macam proses di dalam sistem tersebut atau dengan kata lain dalam sistem tertutup massa zat sebelum dan sesudah reaksi adalah sama (konstan) [4].

Hukum Kekekalan Massa diperoleh dari laju perubahan massa terhadap waktu sama dengan nilai perbedaan fluk massa pada elemen dan waktu yang sama, dimana massa rata-rata sama dengan rata-rata yang masuk ditambah rata-rata massa yang keluar. pada masalah dua dimensi ini kita menggunakan dua persamaan yaitu persamaan yang terkait dengan arah kecepatan u dan yaitu arah horizontal dan vertikal dengan rapat massanya yaitu ρ. Dalam arah x, maka rata-rata massa masuk elemen fluida adalah $(\rho u)\,|_x$ dan rata-rata massa keluar elemen fluida adalah $(\rho u)\,|_{x+\Delta x}$. Sama halnya dengan arah y, maka maka rata-rata massa masuk elemen fluida adalah $(\rho v)\,|_y$ dan rata-rata massa keluar elemen fluida adalah $(\rho v)\,|_{y+\Delta y}$ atau dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\Delta x \Delta y \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta y\,[(\rho u)\,|_x - (\rho u)\,|_{x+\Delta x}\,] + \Delta x\,[(\rho v)\,|_y - (\rho v)\,|_{y+\Delta y}] \tag{2.1}$$

Dengan membagi kedua ruas pada persamaan (2.1) dengan $\Delta x \Delta y$ dan mengambil limit untuk $\Delta x \Delta y \rightarrow 0$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) \tag{2.2}$$

Kasus fluida yang tak termampatkan $\Rightarrow \nabla . \vec{q} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

Diasumsikan bahwa fluida irotasional atau tidak termampatkan maka eksistensi fungsi potensial ϕ sehingga:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ dan } v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{2.4}$$

Jadi substitusikan persamaan (2.4) terhadap persamaan (2.3) dengan fungsi potensial menjadi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.5}$$

2.3 Hukum Kekekalan Momentum

Momentum dimiliki oleh benda yang bergerak. **Momentum** adalah kecenderungan benda yang bergerak untuk melanjutkan gerakannya pada kelajuan yang konstan. Momentum merupakan besaran vektor yang searah dengan kecepatan benda. Momentum dapat dirumuskan sebagai hasil perkalian massa dengan kecepatan. Secara matematis dituliskan:

$$P = mv$$

Dimana:

P = momentum

m = massa partikel

v = kecepatan partikel

Semakin besar massa suatu benda, maka semakin besar momentumnya, dan semakin cepat gerak suatu benda, maka semakin besar pula momentumnya[5]. Hukum kekekalan momentum pada masalah ini terdapat dua persamaan yaitu persamaan yang terkait dengan arah kecepatan u yaitu arah horizontal dan vertikal. Kesetimbangan momentum pada elemen volume tersebut adalah rata-rata perubahan momentum sama dengan rata-rata mementum yang masuk dan keluar ditambah jumlah gaya-gaya yg terjadi. Karena kita meninjau terkait dengan arah x, maka massa yang melintas adalah ρu dikali dengan kecepatan u dan juga massa ρv dikali dengan kecepatan u maka akan kita dapatkan besaran momentum rata-ratanya:

- Dalam arah x, rata-rata momentum yang masuk elemen volume melintasi bidang x adalah $\rho u^2|_x \Delta y$ dan keluar melintasi bidang $x + \Delta x$ adalah $\rho u^2|_{x+\Delta x} \Delta y$.
- Dalam arah y, rata-rata momentum yang masuk elemen volume melintasi bidang x adalah $\rho vu|_y \Delta x$ dan keluar melintasi bidang $y + \Delta y$ adalah $\rho vu^2|_{y+\Delta y} \Delta x$.

Momentum dalam arah y yaitu massa yang masuk dalam elemen fluida yaitu sama ρu dan ρv tetapi kecepatan yang berpengaruh adalah v dalam arah vertikal maka besaran momentum rata-ratanya pada komponen- y :

- Dalam arah x, rata-rata momentum yang masuk elemen volume melintasi bidang x adalah $\rho vu|_x \Delta y$ dan keluar melintasi bidang $x + \Delta x$ adalah $\rho v^2|_{x+\Delta x} \Delta y$.
- Dalam arah y, rata-rata momentum yang masuk elemen volume melintasi bidang y adalah $\rho v^2|_y \Delta x$ dan keluar melintasi bidang $y + \Delta y$ adalah $\rho v^2|_{y+\Delta y} \Delta x$.

Sehingga keseluruhan convection(akibat) komponen-x :

$$\Delta y \Delta z(\rho u^2|_x - \rho u^2|_{x+\Delta x}) + \Delta x \Delta z\left(\rho vu^2|_y - \rho vu^2|_{y+\Delta y}\right) \tag{2.6}$$

Sehingga momentum keseluruhan akibat convection pada komponen-y :

$$\Delta y\left(\rho vu|_x - \rho vu^2|_{x+\Delta x}\right) + \Delta x\left(\rho v^2|_y - \rho v^2|_{y+\Delta y}\right) \tag{2.7}$$

Faktor yang terlibat dalam neraca momentum adalah gaya-gaya yang terjadi pada eleme volume. Gaya yang terpenting adalah tekanan fluida dan gaya akibat gravitasi. Resultan dari gaya-gaya yang terjadi pada elemen bidang dalam arah x adalah konveksi dan tekanan fluida yaitu:

$$\Delta y\left(p|_x - p|_{x+\Delta x}\right) \tag{2.8}$$

Resultan dari gaya-gaya yang terjadi pada elemen bidang dalam arah y adalah gaya akibat gravitasi:

$$\Delta x\left(p|_y - p|_{y+\Delta y}\right) + \rho g_y \Delta x \Delta y \tag{2.9}$$

$p|_x$ dan $p|_y$ menyatakan tekanan pada bidang x dan bidang y, sedangkan g_y yaitu percepatan akibat gravitasi dalam arah y.

Perubahan rata-rata momentum dalam elemen volume yaitu $\Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t}\right)$ dalam komponen x disubstitusikan pada neraca momentum. Persamaan yang diperoleh kemudian dibagi dengan $\Delta x \Delta y$ dan diambil limitnya masing-masing $\Delta x, \Delta y$ menuju ke nol. Sehinggga diperoleh persamaan gerak :

- Komponen x

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.10}$$

- Komponen y

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\left(\frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} +\right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \tag{2.11}$$

Besaran-besaran $\rho u, \rho v$ merupakan komponen-komponen dari vektor kecepatan massa $\rho \vec{q}$, sama halnya dengan g_x, g_y merupakan komponen dari percepatan gravitasi. Makan gradien tekanan dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) \tag{2.12}$$

Komponen massa dan gravitasi dapat dinyatakan sebagai perkalian vektor gradien , sehingga persamaan (2.10), (2.11), dan (2.12) digabungkan menjadi satu persamaan vektor yaitu :

$$\frac{\partial \rho \vec{q}}{\partial t} = -\left[\overline{\nabla}\,.\ \rho \vec{q} \vec{q}\right] - \nabla p + \rho \vec{g} \tag{2.13}$$

$\rho \vec{q} \vec{q}$ merupakan rata-rata berkurangnya momentum persatuan volume oleh aliran fluida. Dengan menggunakan persamaan kontinuitas maka persamaan gerak (2.10) dan (2.11) dapat dinyatakan sebagai berikut (disebut juga persamaan Euler):

$$p \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{2.14}$$

$$p \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho g_y \tag{2.15}$$

Dari persamaan (2.14) dan (2.15) kita memperoleh persamaan kemudian gabungkan kedalam persamaan vektor :

$$p\frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla p + \rho\vec{g} \tag{2.16}$$

Dari persamaan (2.16) asumsikan bahwa fluida adalah inviscid atau tak termampatkan, sehingga dipersamaan euler :

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} \tag{2.17}$$

Dari persamaan tersebut bentuk oprator pada ruas kiri(2.17) dengan menambahkan asumsi bahwa aliran irrotasional menjamin adanya fungsi potensial $\emptyset$.dari defisi operator D/Dt :

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \frac{\partial\vec{q}}{\partial t} + (\vec{q}\,.\nabla)\vec{q} \tag{2.18}$$

Suku kedua pada ruas kanan memenuhi hubungan :

$$\vec{q} \times curl\,\vec{q} = (\vec{q}\,.\nabla)\vec{q} - \nabla\left(\frac{1}{2}q^2\right) \tag{2.19}$$

Sehingga diperoleh :

$$\frac{D\vec{q}}{Dt} = \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}(\nabla\emptyset) + \nabla\left(\frac{1}{2}q^2\right) \tag{2.20}$$

Disini kita mengganti $\vec{q}$ pada suku pertama diruas kanan dengan $\nabla\emptyset$ dan menerapkan asumsi aliran irrotasional ($curl\,\vec{q}$) dengan membedakan notasi yang kita gunakan untuk kecepatan $\vec{q}$ dan laju $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ untuk dua dimensi.

Bila disubstitusikan (2.20) pada persamaan euler (2.17) dan dikeluarkan operator ∇, maka diperoleh :

$$\nabla\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0 \tag{2.21}$$

$\vec{g} = -g\nabla y$ menyatakan gravitasi kearah bawah kemudian mengintegralkan (2.21) menjadi :

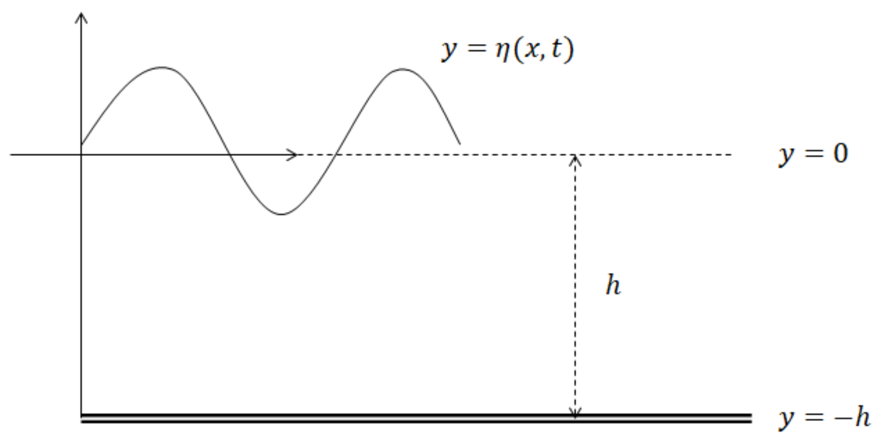
$$\frac{\partial\emptyset}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \tag{2.22}$$

Persamaan ini dikenal dengan persamaan bernoulli, dimana $f(t)$ merupakan fungsi sebarang dari t akibat integrasi yang telah dilakukan dan y pada persamaan diatas merupakan ketinggin partikel yang diamati dari dasar

2.4 Kondisi Batas

Kondisi batas dibagi menjadi dua yaitu kondisi batas dinamik dan kondisi batas kinematik. Dimana kondisi batas kinematik merupakan kondisi batas yang mucul karena adanya gerakan dari partikel-partikel fluida sedangkan kondisi batas dinamik adalah kondisi batas yang terjadi dikarenakan adanya sebuah gaya yang berkerja pada fluida tersebut [9]. Pada kondisi batas ini terdapat kondisi batas linier dan nonlinier, karena kita membahas tentang kondisi batas linier maka kondisi batas nonlinier dibuang.

2.4.1 Kondisi batas Kinematik pada Permukaan



Gambar 2.1 kondisi batas fluida

Pada gambar 2.1 diketahui bahwa x dan y merupaka posisi partikel fluida, sedangkan $y = -h$ merupakan dasar fluida dengan $y = 0$ menyatakan posisi kesetimbangan permukaan fluida dan $y = \eta(x,t)$ merupakan batas permukaan fluida yg menyebabkan persamaan tpermukaan fluida tersebut ditulis secara implisit menjadi:

$$S = y - \eta(x,t) \tag{2.23}$$

Misalkan permukaan S pada fluida dinyatakan sebagai persamaan $S(x, y, t) = 0$ Partikel yang tetap berada pada batas dapat di nyatakan dalam operator turunan total dinyatakan sebagai berikut:

$\frac{DS}{Dt} = 0$

Lalu persamaan (2.23) disubtitusikan ke persamaan turunan total, sehingga:$\frac{\partial(y-\eta(x,t))}{\partial t} + u\frac{\partial(y-\eta(x,t))}{\partial x} + v\frac{\partial(y-\eta(x,t))}{\partial y} = 0$

$$-\eta_t - u\eta_x + v = 0 \quad (2.24)$$

Dengan asumsi bahwa partikel fluida yang ditinjau tak berotasi yaitu $\nabla \times \vec{q} = 0$ maka terdapat fungsi potensial ϕ. Maka persamaan (2.24) dapat ditulis dengan:

$$-\eta_t - \emptyset_x\eta_x + \emptyset_y = 0 \quad (2.25)$$

Persamaan tersebut merupakan kondisi batas kinematik pada permukaan fluida.

2.4.2 Kondisi Batas Kinematik Dasar

Kondisi batas kinematik terjadi dikarenakan tidak ada gaya pada dasarnya. Kondisi batas kinematik dapat ditulis sebagai berikut:

$$y = -h$$

$$y + h = 0 \quad (2.26)$$

Dengan dimisalkan partikel fluida berada di koordinat (x, y) dan tetap pada batasnya, dapat ditulis dengan operator turunan total yaitu:

$$\frac{Df}{Dt} = 0$$

Dengan operator turunan totalnya didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.27)$$

Lalu substuitusikan persamaan (2.27) ke persamaan (2.26) maka:

$$\frac{\partial(y+h)}{\partial t} + u\frac{\partial(y+h)}{\partial x} + v\frac{\partial(y+h)}{\partial y} = 0$$

$$0 + 0 + v = 0$$

Ubah komponen kecepatan (u, v) menjadi $u = \phi_x$ dan $v = \phi_y$ maka menghasilkan persamaan kondisi batas Kinematik Dasar sebagai berikut:

$$\emptyset_y = 0 \quad (2.28)$$

2.4.3 Kondisi Batas Dinamik pada Permukaan

Kondisi Batas Dinamik pada permukaan fluida diambil dari persamaan Bernoulli yaitu:

$$\emptyset_t + \frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} + gy = f(t) \tag{2.29}$$

Dikarenakan ditetapkan tekanan referensi $p = 0$ dengan fungsi $f(t)$ adalah fungsi sembarang t yang dihasilkan dari integral terhadap x dan y serta diasumsikan pada permukaan fluida maka persamaan Kondisi batas Dinamik pada permukaan fluida dengan fungsi potensial sebagai berikut:

$$\emptyset_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) + g\eta = f(t) \tag{2.30}$$

2.5 Metode Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel merupakan metode penyelesain persamaan diferensial parsial yang menggunakan teknik substitusi kedalam persamaan diferensial yang harus memakai kondisi awal dan kondisi batas dalam penyelesaian $y(x,t)$. kita asumsikan $y(x,t) = M(x)N(t)$ lalu dilakukan proses substitusi ke persamaan diferensial. Maka persamaan gelombangnya[3]:

$$y(x,t) = M(x)N(t) \tag{2.31}$$

Untuk menentukan solusi persamaan gelombang yakni:

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} \; untuk \; 0 < x < l \tag{2.32}$$

$$y(0,t) = 0 = y(l,t) \tag{2.33}$$

Lalu substitusikan persamaan (2.31) terhadap persamaan (3.32) menjadi:

$$M(x)N" = c^2 M"(x)N(t)$$

(2.34)

Bagi kedua ruas persamaan (2.34) dengan $-c^2 M(x)N(t)$ maka:

$$\frac{N''(t)}{-c^2 N(t)} = -\frac{M''(x)}{M(x)}$$

(2.35)

Pada ruas kiri persamaan (2.35) tergantung pada t dan pada ruas kanan tergantung pada x sehingga dimisalkan menjadi sebuah konstan. Dimisalkan konstan adalah λ maka persamaan (2.35) adalah:

$$\frac{N''(t)}{-c^2N(t)} = -\frac{M''(x)}{M(x)} = \lambda \tag{2.36}$$

Ditunjukan bahwa $\lambda > 0$ maka kita misalkan menjadi β^2 sehingga persamaan (2.36) dapat dipisah menjadi:

$$N''(t) + c^2\beta^2N(t) = 0$$

(2.37)

Dan

$$M''(x) + M(x)\beta^2 = 0 \tag{2.38}$$

Sehingga solusi dari persamaan (2.37) dan (2.38) adalah:

$$N(t) = A\ cos\beta ct + B\ sin\beta ct$$

$$M(x) = C\ cos\beta x + D\ sin\beta x$$