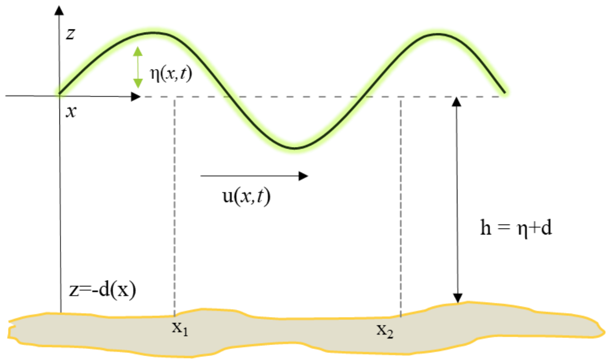
BAB II
PERSAMAAN AIR DANGKAL

Bab II memuat uraian tentang perkembangan keilmuan yang akan diteliti. Penyelesaian numerik persamaan gelombang air dangkal linear pada penelitian ini menggunakan metode beda hingga, serta menentukan syarat kestabilan. Pada bab ini akan dibahas model matematika persamaan air dangkal, skema numerik metode beda hingga dan syarat kestabilan skema numerik.

2.1 Model Matematika Persamaan air dangkal

Persamaan air dangkal atau Shallow Water Equation (SWE) adalah aliran fluida bebas dengan kedalaman air relatif dangkal. Persamaan gelombang air dangkal merupakan salah satu model gelombang permukaan yang banyak digunakan untuk menunjukkan simulasi penyebaran gelombang permukaan yang berjalan dua arah dalam domain ruang satu dimensi dan ke segala arah untuk ruang dua dimensi. Persamaan air dangkal berlaku untuk fluida yang memiliki massa jenis konstan. Persamaan air dangkal ini berlaku pada saat pergerakan fluida secara horizontal sedangkan pergerakan fluida secara vertikal di asumsikan menuju 0 atau diabaikan. Gelombang dikatakan terjadi di permukaan air dangkal jika kedalaman fluida relatif kecil dibanding dengan panjang gelombang dengan asumsi $\frac{d}{L} < \frac{1}{20}$ (Magdalena, Iryanto, & Reeve, 2018) yang diilustrasikan seperti pada gambar 2.1.



Gambar 2.1. Ilustrasi Air Dangkal

Perhatikan bahwa pada Gambar 2.1 sumbu *x* menyatakan arah horizontal dan sumbu *z* menyatakan arah vertikal. Selain itu, variabel $\eta(x,t)$menyatakan simpangan permukaan air dari kondisi setimbang di titik x pada saat t, $u(x,t)$ menyatakan kecepatan horizontal partikel fluida di titik x pada saat t, $h(x,t)$ adalah tebal air di titik x pada saat t dan topografi dasar dinyatakan sebagai $-d(x)$. Dengan demikian $h(x,t) = \eta(x,t) + d(x)$.

Persamaan air dangkal diperoleh melalui proses matematis pada penurunan persamaan konservasi massa dan persamaan konservasi momentum. Bentuk umum persamaan air dangkal linear (*Shallow Water Equations*) sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + d\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

Terlihat bahwa persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial parsial orde satu, dengan g adalah konstanta gravitasi.

2.2 Skema Numerik Metode Beda Hingga

Metode numerik merupakan skema untuk menyimulasikan atau menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang digambarkan dalam bentuk model matematis. Salah satu metode numerik yang sering digunakan pada model persamaan diferensial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa maupun parsial berdasarkan ekspansi Taylor (Noor, Putri, & Syafwan, 2020).

Domain dari persamaan diferensial didiskritisasi menggunakan konsep beda sehingga diperoleh persamaan beda. Misalkan $u(x,t)$ menyatakan solusi persamaan diferensial parsial dan $u\left(x_j, t_n\right)$ menyatakan solusi hampiran persamaan beda, skema beda hingga yang diterapkan dapat menggunakan persamaan beda maju, beda mundur dan beda pusat.

2.2.1 Forward Time – Centered Space (FTCS)

Metode Forward Time – Centered (FTCS) merupakan metode beda hingga yang umum digunakan pada simulasi numerik persamaan diferensial parsial.

Metode ini menggunakan beda hingga maju terhadap waktu dan beda hingga pusat terhadap spasial (Budiana & Hadi, 2005).

Selang pada domain spasial [0,L] dipartisi dengan ukuran Δx dengan titik $x_j = (j-1)\,\Delta x$, untuk $j = 1,2,\dots,Nx$. Begitu juga dengan selang pada domain waktu [0,T] dipartisi dengan ukuran Δt dengan titik-titik partisi $t_n = (n-1)\Delta t$, untuk $n = 1,2,\dots,Nt$. Untuk setiap $j = 1,2,\dots,Nx$ dan $n = 1,2,\dots,Nt$ akan dicari $u_j^n \equiv u(x_j, t_n)$ sebagai hampiran dari solusi eksak $u(x,t)$:

Hampiran beda maju terhadap waktu terlihat sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} \tag{2.4}$$

Sedangkan hampiran beda pusat terhadap spasial adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x} \tag{2.6}$$

Langkah selanjutnya, substitusi hampiran pada persamaan (2.3) hingga persamaan (2.6) ke dalam persamaan air dangkal linear, sehingga diperoleh:

$$\frac{\eta_j^{n+1} - \eta_j^n}{\Delta t} = -d\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) \tag{2.7}$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -g\left(\frac{\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n}{2\Delta x}\right) \tag{2.8}$$

Kedua persamaan tersebut menjadi,

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \tag{2.9}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right) \tag{2.10}$$

Dengan u adalah kecepatan pada arah x, t adalah waktu, g adalah percepatan gravitasi, η adalah perubahan ketinggian permukaan air, dan d adalah topografi dasar.

2.2.2 FTCS yang Dimodifikasi

Persamaan air dangkal linear pada Metode FTCS memiliki persamaan sebagai berikut, seperti tertera pada persamaan (2.9) dan persamaan (2.10)

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right)$$

Persamaan di atas menghasilkan simulasi yang tidak stabil, oleh karena itu dilakukan modifikasi pada persamaan (2.10) untuk nilai η_{j+1}^n sehingga menjadi:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}\right) \qquad (2.11)$$

Skema FTCS yang dimodifikasi ini dapat dikatakan sebagai skema semi implisit.

2.3 Syarat Kestabilan Skema Numerik

Skema numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial memiliki beberapa kriteria yang harus dipenuhi, salah satunya adalah kriteria kestabilan. Kriteria stabilitas menunjukkan karakteristik persamaan diferensial tertentu jika Δt dan Δx mendekati nol. Untuk mengetahui apakah metode yang digunakan untuk simulasi persamaan air dangkal tersebut stabil atau tidak, maka perlu dilakukan uji kestabilan menggunakan analisis stabilitas *Von Neumann* atau lebih dikenal dengan stabilitas *fourier* (Noor, Putri, & Syafwan, 2020), langkahnya adalah dengan melakukan substitusi pada $u_j^n = p^n e^{iaj}$, $\eta_j^n = q^n e^{iaj}$ ke dalam persamaan yang digunakan dengan n menunjukkan waktu, i adalah bilangan imajiner, j merupakan vektor spasial dan untuk setiap α elemen $[0,2\pi]$. Hal yang harus diperhatikan bahwa analisis kestabilan *Von Neumann* bersifat lokal, yang berarti metode mengasumsikan bahwa koefisien dari persamaan beda dianggap konstan dalam suatu waktu dan ruang. Syarat perlu dan cukup kestabilan *Von Neumann* adalah:

$$|p| \leq 1$$

Nilai mutlak *amplification factor* harus selalu kurang atau sama dengan satu, agar kriteria kestabilan untuk skema yang digunakan terpenuhi.

2.3.1 Kestabilan FTCS

Permasalahan persamaan diferensial parsial yang diselesaikan secara numerik dapat menjadi stabil atau tidak stabil, oleh karena itu dilakukan uji kestabilan menggunakan analisis kestabilan *Von Neumann.* Syarat kestabilan *Von Neumann* akan digunakan untuk persamaan air dangkal pada metode FTCS berikut:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n\right)$$

Berdasarkan persamaan tersebut, dilakukan substitusi nilai:

$$u_j^n = p^n e^{iaj}$$

$$u_j^{n+1} = p^{n+1} e^{iaj}$$

$$u_{j+1}^n = p^n e^{ia(j+1)}$$

$$u_{j-1}^n = p^n e^{ia(j-1)} \tag{2.12}$$

$$\eta_j^n = q^n e^{iaj}$$

$$\eta_j^{n+1} = q^{n+1} e^{iaj}$$

$$\eta_{j+1}^n = q^n e^{ia(j+1)}$$

$$\eta_{j-1}^n = q^n e^{ia(j-1)} \tag{2.13}$$

Sehingga diperoleh:

$$q^{n+1} e^{iaj} = q^n e^{iaj} - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n e^{ia(j+1)} - p^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{2.14}$$

$$p^{n+1} e^{iaj} = p^n e^{iaj} - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^n e^{ia(j+1)} - q^n e^{ia(j-1)}\right) \tag{2.15}$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas terhadap e^{iaj}, maka didapatkan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\right) \tag{2.16}$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^n\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\right) \tag{2.17}$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \ \pm \sin a$, diperoleh persamaan:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n(\cos a + i\ sin\ a) - (\cos a - i\ sin\ a)\right) \tag{2.18}$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^n(\cos a + i\ sin\ a) - (\cos a - i\ sin\ a)\right) \tag{2.19}$$

Dilakukan penyederhanaan, sehingga menjadi:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(p^n i \sin a) \tag{2.20}$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(q^n i \sin a) \tag{2.21}$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Misalkan $A = \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix}$, maka persamaan (2.22) menjadi $\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix}$.

Langkah berikutnya adalah menentukan nilai eigen dari matriks A

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & \lambda - 1 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari A sebagai berikut:

$$det(\lambda I - A)x = 0$$

$$det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & \lambda - 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\leftrightarrow (\lambda - 1)^2 - \left(-gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a\right) = 0$$

$$\leftrightarrow \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a\right) = 0$$

$$\leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a = 0 \qquad (2.24)$$

Misalkan,

$$c = 1 + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a, \qquad (2.25)$$

akan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lambda^2 - 2\lambda + c = 0$$

Sehingga akar-akar persamaan di atas adalah:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(c)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4(1 - c)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{(1 - c)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{(1 - c)}$$

Atau dapat ditulis,

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{(1-c)} \tag{2.26}$$

$$\lambda_2 = 1 - \sqrt{(1-c)} \tag{2.27}$$

Syarat kestabilan akan terpenuhi jika $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$. Sehingga diperoleh syarat kestabilan sebagai berikut:

$$|\lambda_1| = \left|1 + \sqrt{(1-c)}\right| < 1$$

$$\leftrightarrow -1 < 1 + \sqrt{(1-c)} < 1$$

Maka haruslah $c \leq 1$ dan $\sqrt{(1-c)} < 1$

$$c \leq 1 \leftrightarrow 1 + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \leq 1$$

$$\leftrightarrow gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \leq 0 \text{ (tidak mungkin)} \tag{2.28}$$

Syarat $\sqrt{(1-c)} < 1$ menjadi tidak berlaku, sebab $c = 1 + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a > 1$ $\forall\ g, d, \Delta t, \Delta x \in \boldsymbol{R}^+$

Sedangkan untuk λ_2, yaitu

$$|\lambda_2| = \left|1 - \sqrt{(1-c)}\right| < 1$$

Dalam hal ini haruslah $c \leq 1$, tetapi hal tersebut tidak mungkin berdasarkan pertidaksamaan (2.28), sehingga skema FTCS tidak stabil untuk setiap pemilihan nilai pada parameter.

2.3.2 Kestabilan FTCS yang Dimodifikasi

Dikarenakan syarat kestabilan pada skema FTCS menunjukkan hasil yang tidak stabil, dilakukan uji kestabilan menggunakan analisis stabilitas *Von Neumann*. Syarat kestabilan *Von Neumann* juga akan digunakan untuk persamaan air dangkal pada metode FTCS setelah modifikasi.

Persamaan air dangkal linear pada metode FTCS yang dimodifikasi:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(\eta_{j+1}^{n+1} - \eta_{j-1}^{n+1}\right)$$

Berdasarkan persamaan tersebut, dilakukan substitusi nilai:

$$u_j^n = p^n e^{iaj}$$

$$u_j^{n+1} = p^{n+1} e^{iaj}$$

$$u_{j+1}^n = p^n e^{ia(j+1)}$$

$$u_{j-1}^n = p^n e^{ia(j-1)}$$

$$\eta_j^n = q^n e^{iaj}$$

$$\eta_j^{n+1} = q^{n+1} e^{iaj}$$

$$\eta_{j+1}^n = q^n e^{ia(j+1)}$$

$$\eta_{j-1}^n = q^n e^{ia(j-1)}$$

Sehingga diperoleh:

$$q^{n+1}e^{iaj} = q^n e^{iaj} - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n e^{ia(j+1)} - p^n e^{ia(j-1)}\right) \qquad (2.29)$$

$$p^{n+1}e^{iaj} = p^n e^{iaj} - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^{n+1} e^{ia(j+1)} - q^{n+1} e^{ia(j-1)}\right) \qquad (2.30)$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas terhadap e^{iaj}, didapatkan bentuk persamaan sebagai berikut:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\right) \qquad (2.31)$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^{n+1}\left(e^{ia} - e^{-ia}\right)\right) \qquad (2.32)$$

Karena $e^{\pm ia} = \cos a \ \pm \sin a$, diperoleh persamaan:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(p^n(\cos a + i\, sin\, a) - (\cos a - i\, sin\, a)\right) \qquad (2.33)$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{2\Delta x}\right)\left(q^{n+1}(\cos a + i\,sin\,a) - (\cos a - i\,sin\,a)\right) \qquad (2.34)$$

Dilakukan penyederhanaan, sehingga menjadi:

$$q^{n+1} = q^n - d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(p^n i \sin a) \qquad (2.35)$$

$$p^{n+1} = p^n - g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(q^{n+1} i \sin a)$$

$$p^{n+1} + g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(q^{n+1} i \sin a) = p^n \qquad (2.36)$$

Persamaan diatas dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix} \qquad (2.37)$$

$$\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-0}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} q^{n+1} \\ p^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & -gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^n \\ p^n \end{pmatrix} \qquad (2.38)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & -gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1 \end{pmatrix}$$

Setelah itu, akan ditentukan nilai eigen dari matriks A

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ -g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & -gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1 \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i \sin a) & \lambda + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1 \end{pmatrix} \qquad (2.39)$$

Berdasarkan kriteria kestabilan *Von Neumann*, maka norm nilai eigen dari matriks amplifikasi A haruslah kurang dari atau sama dengan satu. Sehingga diperoleh nilai eigen dari A sebagai berikut:

$$det(\lambda I - A)x = 0$$

$$det\begin{pmatrix} \lambda - 1 & d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i\sin a) \\ g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i\sin a) & \lambda + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + 1\right) - \left(g\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i\sin a)\right)\left(d\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)(i\sin a)\right)$$

$$= \left(\lambda^2 + \lambda gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a + \lambda - \lambda - gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a - 1\right) + gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a$$

$$= \lambda^2 + \lambda gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a - 1 \qquad (2.40)$$

Misalkan,

$$y = gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a$$

Maka, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lambda^2 + \lambda y - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-y \pm (y + 2)}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-y + (y + 2)}{2}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{-y - (y + 2)}{2}$$

$$\lambda_2 = -y$$

Karena

$$y = gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a$$

Maka, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\lambda_1 = 1 \quad (2.41)$$

$$\lambda_2 = -\,gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \quad (2.42)$$

Diketahui bawa syarat kestabilan akan terpenuhi apabila $|\lambda_1| \leq 1$ dan $|\lambda_2| \leq 1$. Sehingga nilai yang memenuhi syarat kestabilan tersebut adalah sebagai berikut:

$$-1 \leq -\,gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \leq 1 \quad (2.43)$$

Atau dapat dijabarkan menjadi persamaan berikut:

(i). $-\,gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \leq 1$

$\leftrightarrow\ gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \geq 1$

$\leftrightarrow \forall\ g, d, \Delta t, \Delta x \in \boldsymbol{R}^+$

(ii). $-\,gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \geq -1$

$\leftrightarrow\ gd\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 sin^2 a \leq 1 \quad (2.44)$

Karena $0 \leq sin^2 a \leq 1$, maka persamaan (2.24) dapat direduksi menjadi persamaan berikut:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{gd} \leq 1 \quad (2.45)$$

Sehingga persamaan (2.45) merupakan syarat kestabilan dari persamaan air dangkal linear menggunakan metode FTCS yang dimodifikasi.