BAB II
MODEL MATEMATIKA

Pada bab ini kita akan membahas model matematika yang digunakan untuk melihat proses fenomena pendinginan kopi. Fenomena pendinginan kopi ini akan menggunakan 2 model yang dimodelkan menggunakan model deterministik. Selanjutnya akan dicetitakan ilustrasi laju pendinginan kopi dari kedua model tersebut.

2.1. Model 1 Pendinginan Kopi

Fenomena pendinginan kopi adalah suatu fenomena dalam kehidupan sehari-hari saat mendiamkan suatu kopi panas pada suhu lingkungan. Fenomena tersebut menggambarkan seberapa cepat kopi panas tersebut mendingin dan dapat dimodelkan menggunakan model deterministik. Dalam tugas akhir ini model deterministik pada pendinginan kopi menggunakan persamaan diferensial biasa. Temperatur kopi yang didiamkan pada suhu ruang akan berubah (menurun) seiring berjalannya waktu. Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 adalah suatu persamaan yang hanya mempunyai satu variabel bebas dan memuat turunan pertama [1]. Dari Model pertama menyatakan bahwa laju penurunan suhu kopi terhadap waktu t sebanding dengan suhu kopi pada saat waktu tersebut, yaitu:

$$\frac{dT(t)}{dt} \sim T(t) \tag{2.1}$$

dengan T meyatakan suhu dari kopi panas dan t menyatakan waktu. Sehingga dari hubungan pada (2.1) akan diperoleh persamaan:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -kT(t) \tag{2.2}$$

dengan k merupakan konstanta kesebandingan dan diasumsikan $k > 0$. Persamaan (2.2) adalah PDB Orde 1 karena hanya melibatkan sebuah variabel bebas (t) dan orde turunan pertama $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ sebagai orde turunan fungsinya. Selanjutnya akan dicari solusi PDB Orde 1 pada Persamaan (2.2) sebagai berikut:

$$\frac{dT(t)}{dt} = -kT(t)$$

$$\frac{1}{T(t)} dT(t) = -kdt$$

$$\int \frac{1}{T(t)} dT(t) = \int -kdt$$

$$\ln T(t) = -k \int dt$$

$$\ln T(t) = -kt + C_1$$

$T(t) = e^{-kt+C_1} = e^{-kt}e^{C_1}$. Misalkan $C = e^{C_1}$, maka

$$T(t) = Ce^{-kt} \tag{2.3}$$

Setelah menyelesaikan Persamaan (2.2), didapatkan solusi umum dari persamaan Pendingian Kopi seperti yang tertera pada Persamaan (2.3). Jika diberikan syarat awal T_0 pada saat $t_0 = 0$, maka:

$$T(t_0) = T_0$$

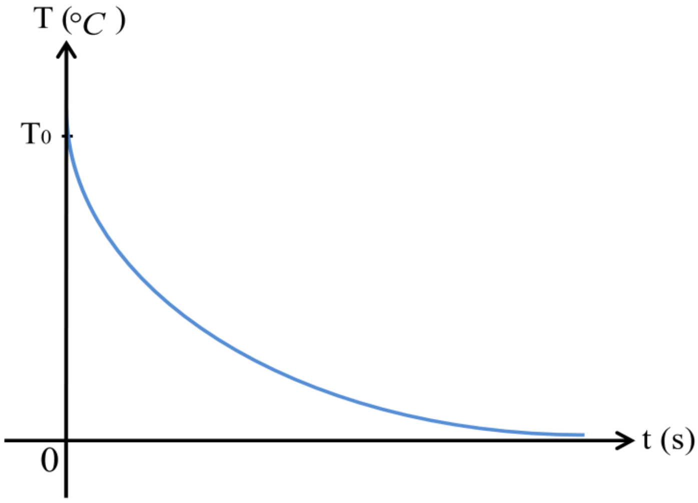
$$T(0) = Ce^0 = C$$

$$T_0 = C \tag{2.4}$$

dengan mensubtitusikan Persamaan (2.4) ke Persamaan (2.3), akan diperoleh solusi khusus:

$$T(t) = T_0 e^{-kt} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) merupakan solusi analitik yang akan memenuhi persamaan Pendinginan Kopi dengan ilustrasi pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Ilustrasi laju pendinginan kopi model 1

Perhatikan bahwa sumbu t menyatakan waktu dengan dan sumbu T menyatakan suhu kopi dengan T_0 adalah suhu awal kopi panas pada saat t = 0. Terlihat bahwa mula-mula laju perubahan suhu kopi turun dengan cepat. Seiring berjalannya waktu, kurva melandai dengan laju perubahan yang terlihat semakin lambat sampai menuju suhu 0°C secara asimtotik. Ilustrasi model tersebut berhasil menangkap fenomena suhu kopi yang menurun. Namun suhu kopi tidak mungkin terus mendingin hingga 0°C sebab kopi didiamkan pada suhu ruangan (27°C). Sehingga model 1 perlu diperbaiki.

2.2. Model 2 Pendinginan Kopi

Untuk perbaikan model suatu kopi panas yang didiamkan pada lingkungan, terdapat tambahan asumsi berupa parameter suhu kamar yang dinyatakan dengan T_a, sehinggas model persamaan diferensial ditulis:

$$\frac{dT(t)}{dt} \sim (T(t) - T_a) \tag{2.6}$$

dari model Persaman (2.6) maka diperoleh persamaan

$$\frac{dT(t)}{dt} = -k(T(t) - T_a) \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) masih merupakan PDB Orde 1, *separable equation*. Sehingga Penyelesaikan Persamaan (2.7) dilakukan dengan cara yang serupa dengan Model 1:

$$\frac{1}{(T(t)-T_a)}dT(t) = -kdt \tag{2.8}$$

$$\int \frac{1}{(T(t)-T_a)}dT(t) = \int -kdt$$

$$\int \frac{1}{(T(t)-T_a)}dT(t) = -k\int dt$$

$$\ln|T(t)-T_a| = -kt + C_1$$

$$|T(t)-T_a| = e^{-kt+C_1} = e^{-kt}e^{C_1}$$

$$T(t)-T_a = \pm e^{-kt}e^{C_1}; \text{Misal } C = \pm e^{C_1}, \text{maka}$$

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_a \tag{2.9}$$

Solusi umum dari Persamaan (2.7) adalah Persamaan (2.9).

Jika diberikan syarat awal $T(0) = T_0$, maka

$$T(0) = T_0$$

$$T(0) = Ce^0 + T_a$$

$$= C + T_a$$

$$C = T(0) - T_a$$

$$= T_0 - T_a \tag{2.10}$$

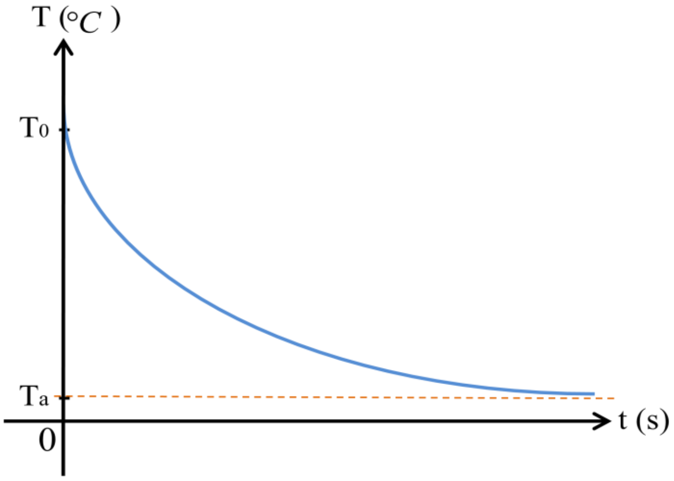
Subtitusikan Persamaan (2.10) ke Persamaan (2.9) untuk mendapatkan solusi khusus:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$$

$$= T_0e^{-kt} - T_ae^{-kt} + T_a$$

$$T(t) = T_0e^{-kt} + T_a(1 - e^{-kt}) \tag{2.11}$$

Persamaan (2.11) merupakan solusi analitik dari model 2 yang memenuhi persamaan Pendinginan Kopi dengan ilustrasi berikut:



Gambar 2.2. Ilustrasi laju pendinginan kopi model 2

Gambar 2.2 menunjukkan fenomena yang serupa dengan Gambar 2.1. Namun Gambar 2.2 menunjukkan kopi panas yang mula-mula bersuhu T_0℃ yang jika didiamkan, maka semakin lama semakin menurun munuju suhu T_a℃ secara asimtotik.