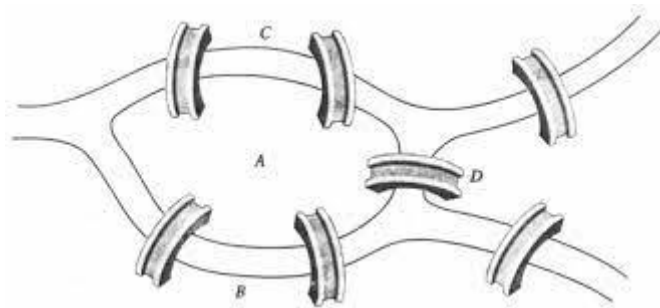


BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Teori Graf awal mula ditemukan sekitar tahun 1736 oleh Leonhard Euler yang membahas masalah tentang jembatan konigsberg. Adapun masalah tersebut ialah ada atau tidak sirkuit euler pada daratan dengan pulau kecil yang dihubungkan oleh tujuh jembatan.



Gambar 2. 1 Representasi jembatan Koenigsberg

Kemudian Euler memodelkan permasalahan tersebut dengan menggambarkan empat titik yang diberi label A,B,C dan D. Serta terdapat tujuh buah sisi yang menggambarkan tujuh jembatan yang menghubungkan empat daerah tersebut.

Berikut terdapat definisi *Graf* menurut Bondy dan Murty tahun 1976 [5] Graf G merupakan pasangan dari himpunan titik dan sisi (V, E) , yang dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Adapun V menyatakan himpunan tak kosong dari titik (*vertices*), dan E menyatakan himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan antara titik satu dengan titik lain. Misal $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ merupakan himpunan titik sebanyak n buah titik di G . Sedangkan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ merupakan himpunan sisi sebanyak m buah sisi di G .

Misalkan sisi e menghubungkan titik v_1 dengan v_2 , dapat dituliskan dengan sisi (e_1, e_2) ataupun sebaliknya. Jika $e_1 e_2$ merupakan anggota dari himpunan sisi $E(G)$, maka kedua titik itu disebut *bertetangga* di G . Selain itu di dalam graf terdapat yang

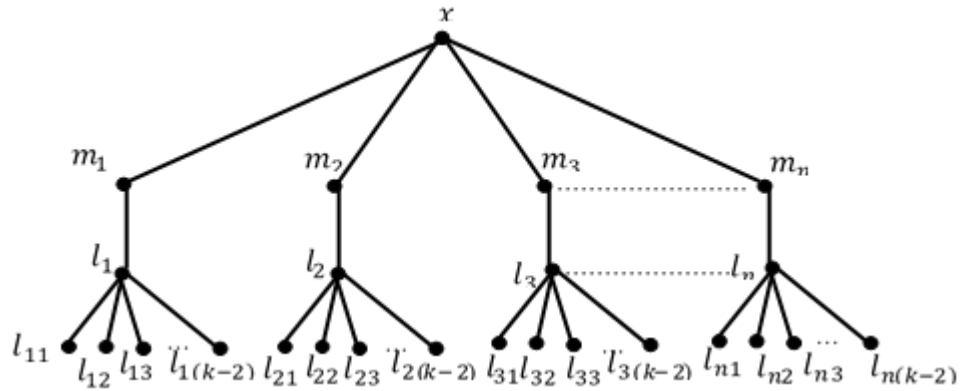
disebut dengan *derajat* yang didefinisikan sebagai banyaknya sisi yang terhubung pada suatu sisi u , disebut dengan derajat dan dinotasikan dengan $d(v)$. Banyaknya suatu titik di G merupakan *orde* dari G dan dinotasikan dengan $|G|$.

Lintasan (Path) merupakan kumpulan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ yang dihubungkan dengan suatu kumpulan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ yang membentuk suatu barisan berhingga $W = \{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, v_n, e_n\}$ tanpa titik dan sisi yang berulang. Kemudian *jarak* antar dua titik di G dimisalkan dengan v_1 dan v_2 merupakan panjang lintasan terpendek dari titik v_1 ke v_2 atau dari titik v_2 ke v_1 . Graf dikatakan *terhubung* jika terdapat dua titik yang dimisalkan dengan v_1 dan v_2 , dimana terdapat lintasan yang menghubungkan v_1 dan v_2 . Suatu graf dikatakan *tak terhubung* jika terdapat satu pasang atau lebih pasang titik di G tidak memiliki lintasan yang menghubungkan pasangan titik itu [5].

Graf Bintang secara umum merupakan suatu graf yang memiliki satu titik yang terhubung dengan titik lainnya. Graf Bintang juga merupakan salah satu kasus khusus dari graf bipartisi lengkap $(K_{m,n})$, yaitu suatu graf yang mempunyai himpunan partisi V_1 dan V_2 . Dimana dengan nilai $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$. Sehingga untuk nilai $m = 1$ ($K_{1,n}$) ialah graf bintang [6].

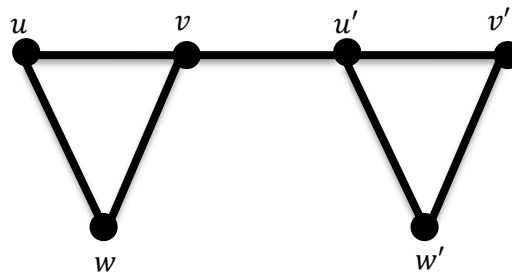
Berikut definisi Graf Pohon Pisang oleh Asmiati tahun 2017 [4], Graf pohon pisang $(B_{n,k})$ ialah suatu graf yang dibentuk oleh n buah graf bintang (S_k) dengan $n \geq 1$ dan $k \geq 2$, dimana satu daun pada setiap graf bintang (S_k) akan dihubungkan ke suatu titik baru yang disebut titik akar. Titik akar dituliskan dengan notasi (x) , untuk titik yang berjarak 1 dari titik akar disebut dengan titik tengah dituliskan dengan m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Kemudian untuk setiap titik pusat dari graf bintang (S_k) dituliskan dengan l_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$). Titik daun ke- j dari titik pusat l_i dituliskan dengan notasi $l_{i,j}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, k - 2$.

Contoh graf pohon pisang $(B_{n,k})$ terdapat pada gambar 2.2.

Gambar 2. 2 Graf Pohon Pisang ($B_{n,k}$)

Pada Graf Pohon Pisang untuk titik $l_{i,j}$ saat titik ke- j akan bernilai hingga $k - 2$, hal ini dikarenakan untuk graf bintang bernilai $k - 1$, kemudian $k - 1$ yang lain berada pada titik tengah (m_n) yang dihubungkan dengan titik akar (x).

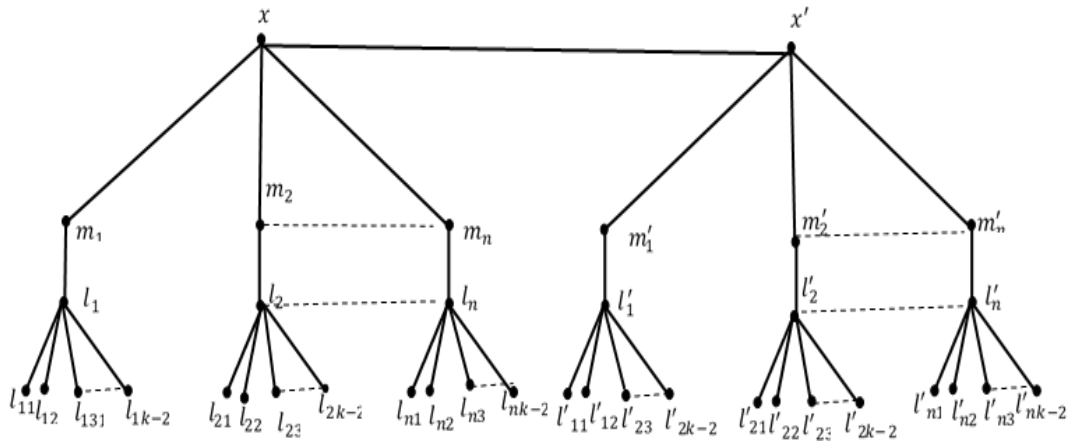
Graf Barbel dituliskan dengan B_G merupakan graf yang terbentuk dengan membuat tiruan atau salinan graf G dan dihubungkan oleh sebuah jembatan atau sisi diantara 2 graf G tersebut, dimana $n \geq 3$ dengan n ialah suatu bilangan asli [7].



Gambar 2. 3 Contoh Graf Barbel

Misal ($B_{B_{n,k}}$) merupakan graf barbel yang terbentuk dari graf pohon pisang, dengan membuat salinan graf tersebut, sehingga mempunyai dua buah graf pohon pisang kemudian kedua graf tersebut dihubungkan dengan sebuah jembatan atau sisi pada titik akar (x) pada graf asal dengan titik akar pada graf salinan (x').

Berikut contoh gambar dari Graf Barbel yang memuat Graf Pohon Pisang ($B_{B_{n,k}}$).



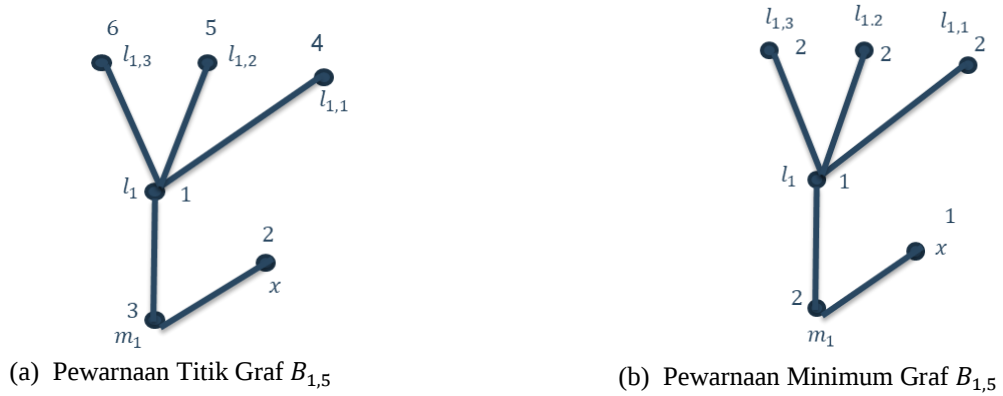
Gambar 2. 4 Konstruksi Graf Barbel yang memuat graf memuat Graf Pohon Pisang

Berdasarkan Gambar 2.4. merupakan konstruksi graf barbel yang memuat graf pohon pisang dimana titik akar asal (x) dengan titik akar graf salinan (x'), lalu titik yang berjarak 1 dari titik akar disebut tengah graf asal (m_i) dengan titik tengah (m'_i), kemudian titik pusat dari S_k dituliskan dengan (l_i) untuk graf asal dan (l'_i) untuk graf salinannya, daun ke- j dari titik pusat (l_i) dituliskan dengan (l_{ij}) untuk graf asal dan (l'_{ij}) untuk graf salinan.

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Di dalam Graf terdapat tiga jenis pewarnaan yaitu, pewarnaan titik (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*) dan pewarnaan daerah (*region*). Misal terdapat graf G , adapun pewarnaan semua titik di graf G untuk dua titik yang bertetangga akan memiliki warna yang berbeda, hal ini disebut dengan *pewarnaan titik*. Pada proses pewarnaan titik merupakan pemetaan $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ dengan pewarnaan yang paling minimum warna yang digunakan dalam proses pewarnaan disebut dengan *bilangan kromatik* graf G yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Perhatikan pada dua contoh pewarnaan Graf $B_{1,5}$ yang memuat 5 sisi dan 6 titik di bawah ini:

Gambar 2. 5 (a) dan (b) Pewarnaan Graf $B_{1,5}$

Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung, dimana c pewarnaan titik- k di G yang diwarnai dengan $1, 2, 3, \dots, k$. Kemudian definisikan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ suatu partisi dari $V(G)$, dimana C_i merupakan himpunan titik yang berwarna i . Kode warna dari v yang dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$ merupakan suatu pasangan terurut dengan panjang k berikut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min \{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk setiap nilai $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Dikatakan c sebagai *Pewarnaan Kromatik lokasi* jika semua titik di G memiliki kode warna yang berbeda, dengan nilai k minimum dari semua pewarnaan kromatik lokasi di G yang dinotasikan sebagai $\chi_L(G)$ [1].

Berikut diberikan beberapa teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari [1]

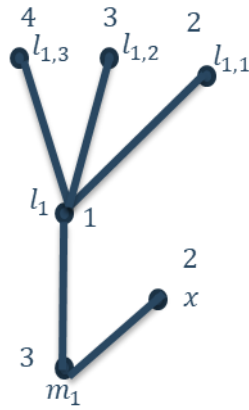
Teorema 2.1.

Misal c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung di G . Jika u dan v merupakan dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ dimana untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka untuk $c(u) \neq c(v)$. Akibatnya jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka untuk $c(u) \neq c(v)$

Akibat 2.1.

Jika G merupakan graf terhubung yang mengandung satu titik yang bertetangga dengan k daun di graf G , maka $\chi_L(G) \geq k + 1$

Sebagai contoh perhatikan Gambar 2.5. yang mengandung 6 buah titik dan 5 buah sisi, serta memiliki $\chi_L(B_{1,5}) = 4$. Hal ini disebabkan pada titik l_1 memiliki tetangga sebanyak $k - 2$ daun. Maka $\chi_L(B_{1,5}) \geq 4$, sehingga untuk pewarnaan lokasi minimumnya dapat diwarnai dengan 4 warna.



Gambar 2. 6 Pewarnaan Lokasi Minimum Graf $B_{1,5}$

Berikut kode warna dari semua titik pada Gambar 2.5.

$$c_{\Pi}(x) = (2, 0, 1, 3), c_{\Pi}(m_1) = (1, 1, 0, 2), c_{\Pi}(l_1) = (0, 1, 1, 1)$$

$$, \quad c_{\Pi}(l_{1,1}) = (1, 0, 2, 2), c_{\Pi}(l_{1,2}) = (1, 2, 0, 2), c_{\Pi}(l_{1,3}) = (1, 2, 2, 0)$$

Berdasarkan kode warna di atas untuk masing-masing titik yang ada di Gambar 2.5. berbeda maka $\chi_L(B_{1,3}) = 4$