BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

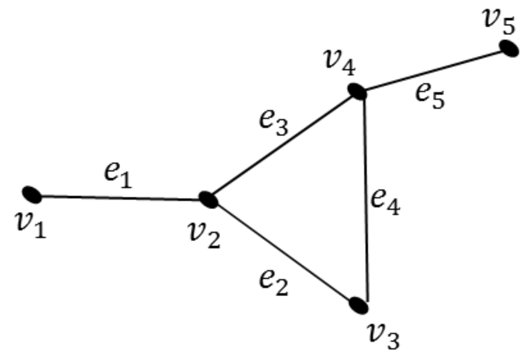
2.1 Konsep Dasar Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan titik dan sisi (*V*,*E*), ditulis dengan notasi *G* = (*V*,*E*), yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices*) dan E adalah himpunan sisi (*edges*) yang menghubungkan sepasang titik, dalam hal ini E boleh kosong [8]. Pada Gambar 2.1 Graf G dimana $G = (V(G), E(G))$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

Suatu sisi e yang memiliki titik ujung yang beruapa titik v_1 dan v_2 dapat dituliskan sebagai sisi $v_1 v_2$ (atau $v_2 v_1$). Jika $v_1 v_2 \in E(G)$ maka titik v_1 dan v_2 dikatakan titik yang *bertetangga* di G,. Banyaknya sisi yang terkait dengan v_1 disebut *derajat* dari titik v_1, dinotasikan sebagai $d(v_1)$. Banyaknya titik pada Graf G disebut *orde* dari G dan dinotasikan dengan $|G|$. Graf dengan orde 1 disebut *graf trivial*. Pada Gambar 2.1 merupakan graf dengan orde $|G| = 5$.

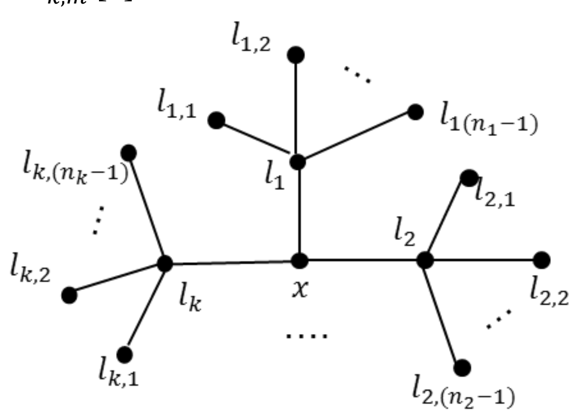
Suatu *lintasan* di G merupakan barisan $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ dimana $p_i \in V(G)$ dan $p_i p_{i+1} \in E(G)$ dengan $p_i \neq p_j$untuk $i \neq j$. Dalam hal ini lintasan P menghubungkan titik $p_1$ke p_n. Kemudian untuk *jarak* antara dua titik v_1, v_2 di G merupakan panjang lintasan terpendek yang dapat dibentuk dengan titik ujung lintasan dari v_1 ke v_2 dan dinotasikan dengan $d(v_1, v_2)$.

Suatu Graf G disebut sebagai *graf terhubung* jika untuk setiap dua titik berbeda dalam graf terdapat lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut. Suatu Graf G dikatakan *graf tidak terhubung*, untuk setiap graf G yang memiliki satu pasang atau lebih titik di G yang tidak memiliki lintasan untuk menghubungkan pasangan titik tersebut [8].



Gambar 2.1 Graf G dengan 5 titik dan 5 sisi

Suatu graf bintang $K_{1,m}$ adalah graf dengan $m+1$ titik dengan $V(K_{1,m}) = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ dengan $E(K_{1,m}) = \{v_0 v_i | v_0 v_i \in V(G)\}$ untuk $1 \leq i \leq n$.Misalkan terdapat k buah graf bintang K_{1,n_i}, $n_i \geq 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dengan k, n_i adalah bilangan bulat. Graf Amalgamasi Bintang Seragam, $S_{k,(n_1,n_2,\dots,n_k)}$, dengan k $\geq$ 2, adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan/menempelkan sebuah daun dari masing-masing graf bintang, kemudian titik hasil penggabungan daun disebut *pusat amalgamasi*, dinotasikan x. Titik yang berjarak satu dari pusat amalgamasi disebut *titik tengah*, dinotasikan l_i, $i = 1,2,\dots,k$ dan titik daun ke-j yang bertetangga dengan titik tengah l_i dinotasikan $l_{i,j}$, untuk $j = 1,2,\dots,m-1$. Jika $n_i = m$ dengan $m \geq 1$ untuk semua i, maka $S_{k,(m_1,m_2,\dots,m_k)}$ disebut graf amalgamasi bintang seragam dinotasikan sebagai $S_{k,m}$ [4].

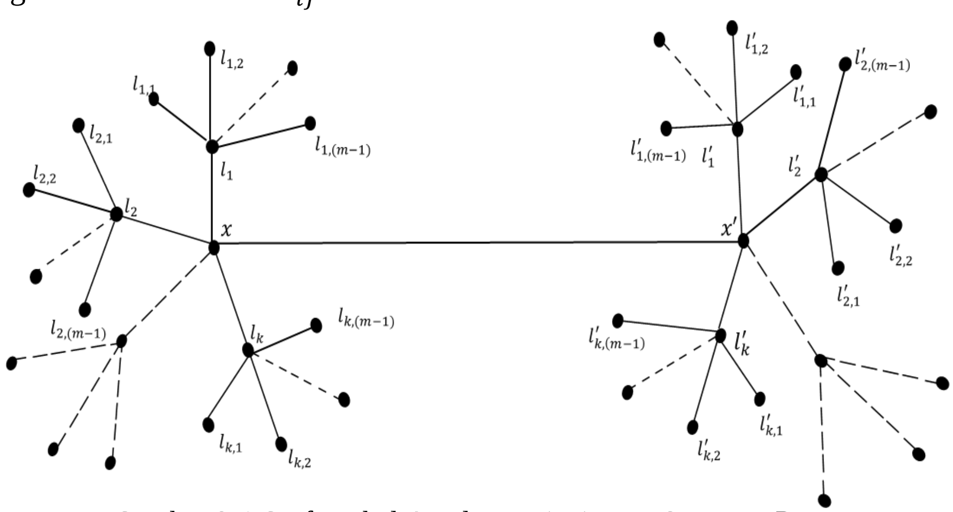


Gambar 2.2 Graf Amalgamasi Bintang Seragam $S_{k,m}$

Misal G suatu Graf G merupakan graf yang terbentuk dari tiruan/salinan Graf G dengan menghubungkan Graf G dengan sebuah salinan Graf G menggunakan sebuah jembatan/sisi, dinotasikan sebagai B_G dimana $n \geq 3$ dengan n suatu bilangan asli [7].

Gambar 2.3 Graf Barbel G untuk $n = 3$

Misal $B_{S_{k,m}}$ merupakan graf barbel yang memuat graf amalgamasi bintang seragam, maka $B_{S_{k,m}}$ dibentuk dengan membuat salinan graf amalgamasi bintang seragam dan menghubungkan dengan sebuah garis dari titik pusat graf dengan tiruan/salinan dari graf asal. Gambar 2.4 merupakan konstruksi graf barbel yang memuat graf amalgamasi bintang seragam $B_{S_{k,m}}$ dengan *titik pusat* x dengan *titik pusat barbel* x'. Titik yang berjarak satu dari titk pusat amalgamasi disebut *titik tengah* l_i dengan *titik tengah barbel* l_i' dan untuk titik yang berjarak satu dari titik tengah disebut *titik daun* l_{ij} dengan *titik daun barbel* l_{ij}'.



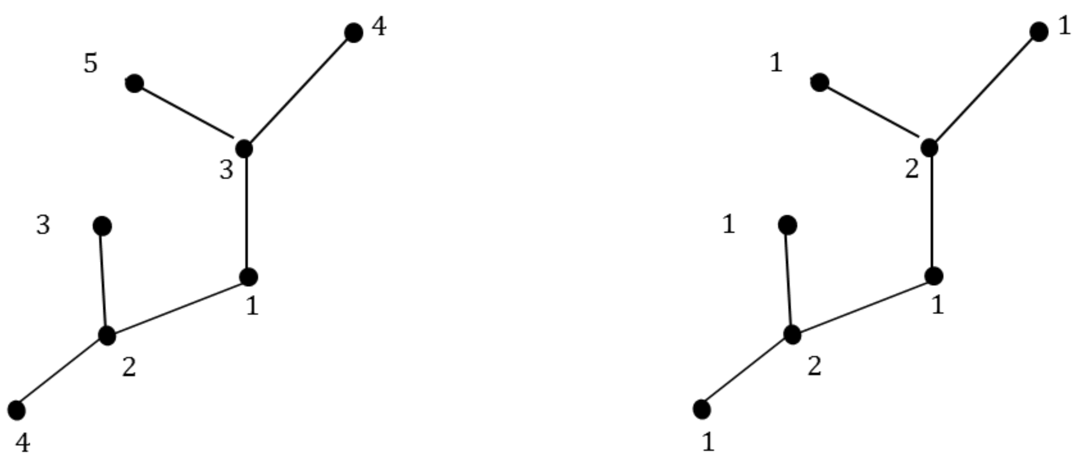
Gambar 2.4 Graf Barbel Amalgamasi Bintang Seragam $B_{S_{k,m}}$

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Pewarnaan dalam Graf merupakan kasus khusus dari pelabelan graf, terdapat tiga macam pewarnaan graf, diantaranya pewarnaan titik (*vertex*), pewarnaan sisi (*edge*), dan pewarnaan wilayah (*region*).

Misal sebuah Graf G, perwarnaan semua titik G dengan menggunakan warna sedemikian hingga dua titik di G yang bertetangga mendapat warna yang berbeda disebut *pewarnaan titik*. Pewarnaan titik-k adalah pemetaan $c: V \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$, nilai k minimum dari semua pewarnaan titik-k pada graf G disebut *bilangan kromatik* di G, yang dilambangkan dengan $\chi(G)$. Sebuah Graf G dengan $\chi(G) \leq k$ maka Graf G bisa diwarnai dengan menggunakan k warna [9].

Perhatikan dua contoh pewarnaan Graf $S_{2,3}$ yang memuat 7 titik dan 6 sisi, pada gambar a bisa diwarnai 5 warna dan gambar b diwarnai 2 warna artinya $\chi(S_{2,3}) \leq 2$, lebih jauh graf tersebut tidak dapat diwarnai dengan 1 warna karena akan ada 2 titik yang bertetangga dengan warna yang sama, akibatnya $\chi(S_{2,3}) \geq 2$. Jadi dapat diambil kesimpulan bahwa $\chi\left(S_{2,3}\right) = 2$.



(a) Pewaraan Titik Graf $S_{2,3}$ (b). Pewaraan Minimum Graf $S_{2,3}$

Gambar 2.5 (a) dan (b) Contoh Pewarnaan Graf $S_{2,3}$

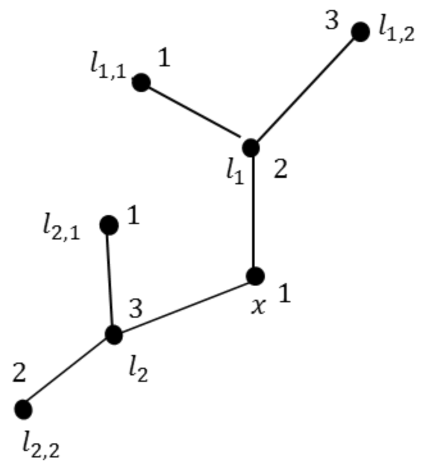
Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung, c merupakan pewarnaan titik-k di G dengan warna $1, 2, \dots, k$, definisikan $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ suatu partisi dari $V(G)$, dengan C_i himpunan titik yang berwarna i. *Kode warna* $c_\Pi(v)$ dari titik v adalah pasangan terurut dengan panjang k berikut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$, dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) \mid x \epsilon C_i\}$ untuk setiap i=1,2,3, ..., k. Jika semua titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut *pewarnaan kromatik lokasi* di G. Nilai k minimum dari semua pewarnaan kromatik lokasi-k yang memenuhi disebut sebagai *bilangan kromatik lokasi* dari Graf G, dinotasikan $\chi_L(G)$ [3].

Berikut ini akan diberikan beberapa teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi graf yang diambil dari [3].

Teorema 2.1.
Misal c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \backslash \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Akibatnya, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Akibat 2.1.
Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Perhatikan Graf $S_{2,3}$ yang memuat 7 titik dan 6 sisi dengan $\chi_L(S_{2,3}) = 3$ pada Gambar 2.6. Karena setiap titik l_1 bertetangga dengan 2 daun berdasrkan Akibat 2.1, maka $\chi_L(S_{2,3}) \geq 3$. Selanjutnya, pewarnaan lokasi minimum Graf $S_{2,3}$ dapat diwarnai dengan 3 warna.



Gambar 2.6 Pewarnaan Lokasi Minimum pada Graf $S_{2,3}$

Kode warna dari masing-masing titik adalah sebagai berikut:
$c_\Pi\ (x) = (0,1,1)$, $c_\Pi\ (l_1) = (1,0,1)$, $c_\Pi\ (l_{1,1}) = (0,1,2)$, $c_\Pi\ (l_{1,2}) = (2,1,0)$,
$c_\Pi\ (l_2) = (1,1,0)$, $c_\Pi\ (l_{2,1}) = (0,2,1)$, $c_\Pi\ (l_{2,2}) = (2,0,1)$
Karena kode warna dari semua titik di Graf $S_{2,3}$ berbeda, maka $\chi_L(S_{2,3}) \leq 3$, dapat diambil kesimpulan bahwa $\chi_L(S_{2,3}) = 3$.