

BAB II

TEORI DASAR

2.1 Metode Gayaberat

Gayaberat adalah salah satu metode dalam geofisika yang dapat digunakan untuk studi geologi regional bawah permukaan sehingga dapat menggambarkan struktur geologi bawah permukaan yang lebih baik dibandingkan metode geofisika lainnya. Metode gayaberat adalah metode penelitian dalam geofisika yang didasarkan pada adanya variasi medan gravitasi akibat variasi rapat massa (densitas) batuan yang menggambarkan adanya struktur geologi di bawah permukaan bumi.

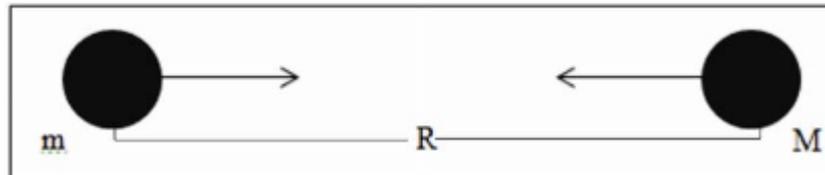
Adanya variasi rapat massa batuan dibawah permukaan bumi antara suatu tempat dengan tempat lain, akan menimbulkan medan gaya gravitasi yang tidak merata dan perbedaan inilah yang terukur di permukaan bumi. Variasi rapat massa batuan yang dapat menyebabkan medan gaya gravitasi tidak merata dapat dipengaruhi struktur bawah permukaan (struktur geologi) yang merupakan daerah sebagai akibat dari terjadinya perubahan – perubahan pada batuan oleh proses tektonik atau proses lainnya. Pada tahap awal perkembangan metode ini telah sukses untuk menentukan struktur jebakan minyak, struktur bawah permukaan di daerah pertambangan, lengkungan lithosfera dan lain-lain (Sarkowi, 2008).

Pada saat pengukuran menggunakan metode gravitasi nilai yang terukur pada alat biasanya dipengaruhi oleh beberapa faktor seperti lintang, ketinggian, topografi di setiap titik pengukuran, interaksi bumi dengan matahari dan bulan (pasang-surut), serta perbedaan (variasi) rapat massa batuan di bawah permukaan bumi. Perbedaan rapat massa batuan dibawah permukaan merupakan salah satu faktor yang signifikan dalam suatu eksplorasi gayaberat dibandingkan dengan keempat faktor lainnya. Dasar teori dari metode gayaberat adalah hukum gravitasi Newton (Telford et al., 1990)

2.2 Konsep Dasar Metode Gayaberat

2.2.1 Gaya Gravitasi

Konsep dasar metode gaya berat adalah Hukum Newton tentang gaya tarik menarik antara benda dengan masa tertentu dipisahkan oleh jarak, yang dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2. 1 Sketsa Gaya Tarik Dua Benda R

Kedua benda tertentu yang dipisahkan oleh jarak tertentu akan memiliki gaya tarik menarik yang besarnya dinyatakan oleh persamaan berikut (Grandis,2009):

$$\vec{F}(r) = - G \frac{m_1 \cdot M}{R^2} \hat{r} \quad (2.1)$$

dimana : $\vec{F}(r)$: gaya tarik menarik (N)

G : konstanta Gravitasi Universal ($6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$)

m, M : massa benda m dan massa benda M (kg)

R : jarak antara dua buah benda (m-M)

\hat{r} : vector satuan (m)

2.2.2 Percepatan Gravitasi

Dalam pengukuran gayaberat yang diukur bukan gaya gravitasi F, melainkan percepatan gravitas g. Hubungan antara keduanya dijelaskan oleh hukum Newton II yang menyatakan bahwa sebuah gaya adalah hasil perkalian dari massa dengan percepatan. Hukum Newton mengenai gerak Newton, yaitu:

$$F = m.g \quad (2-2)$$

Interaksi antara bumi (bermassa M) dengan benda di permukaan bumi (bermassa m) sejauh jarak R dari pusat keduanya juga memenuhi hukum tersebut, maka dari persamaan (2-1) dan (2-2) dikombinasikan sehingga didapatkan sebagai berikut:

$$g = G \frac{M}{R^2} \quad (2-3)$$

Dari persamaan ini, terlihat bahwa besarnya gaya berat berbanding langsung dengan massa penyebabnya, sedangkan massa berbanding langsung dengan rapat massa (ρ) dan volume benda (yang berhubungan dengan geometri benda). Dengan demikian, besarnya gaya berat yang terukur akan mencerminkan kedua besaran tersebut.

2.2.2.1 Potensial gaya berat distribusi massa

Potensial gravitasi adalah energi yang diperlukan untuk memindahkan suatu massa dari suatu titik ke titik tertentu. Suatu benda dengan massa tertentu dalam sistem ruang akan menimbulkan medan potensial di sekitarnya. Dimana medan potensial bersifat konservatif, artinya usaha yang dilakukan dalam suatu medan gravitasi tidak tergantung pada lintasan yang ditempuhnya tetapi hanya tergantung pada posisi awal dan akhir (Rosid, 2005). Medan potensial dapat dinyatakan sebagai gradien atau potensial skalar melalui persamaan Blakely:

$$g = -\nabla U(r) \quad (2-4)$$

Fungsi U pada persamaan di atas disebut potensial gravitasi, sedangkan percepatan gravitasi g merupakan medan potensial. Tanda minus menandakan bahwa arah gaya berat menuju ke titik yang dituju.

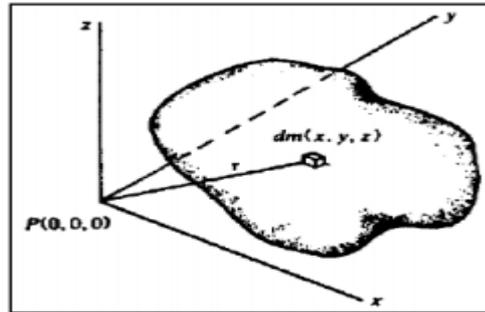
Dengan mengasumsikan bumi dengan massa M bersifat homogen dan berbentuk bola dengan jari-jari R , potensial gravitasi di permukaan dapat didefinisikan dengan persamaan:

$$\nabla U(\vec{r}) = - \frac{F(\vec{r})}{m_2} = -g(\vec{r}) \quad (2-5)$$

$$U(\vec{r}) = \int_{\infty}^r (\nabla U). dr = \int_{\infty}^r g. dr \quad (2-6)$$

$$U(r) = -Gm \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = G \frac{m}{r} \quad (2-7)$$

Potensial total gaya berat bersifat penjumlahan sedangkan potensial gaya berat distribusi massa yang kontinu atau benda yang berdimensi yaitu dalam ruang bervolume V dengan rapat massa dengan rapat massa yang konstan ditunjukkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2. 2 Potensial massa tiga dimensi (Telford dkk.,1990)

Berdasarkan persamaan (2-7), potensial yang disebabkan oleh elemen massa dm pada titik (x,y,z) dengan jarak r dari $P(0,0,0)$ adalah:

$$dU = G \frac{dm}{r} = G \rho \frac{dx dy dz}{r} \quad (2-7)$$

dimana $\rho(x,y,z)$ adalah densitas dan $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Potensial total dari massa adalah:

$$U = \int_x \int_y \int_z \frac{\rho}{r} dx dy dz \quad (2-8)$$

karena g adalah percepatan gravitasi pada sumbu z (arah vertikal) dan dengan asumsi ρ konstan, maka:

$$g = - \left(\frac{dU}{dz} \right) = \int_x \int_y \int_z \frac{z}{r^3} dx dy dz \quad (2-9)$$

2.3 Koreksi Gayaberat

Koreksi data gayaberat perlu dilakukan sebelum hasil survei dapat diinterpretasikan secara geologi. Hal ini dikarenakan dalam penelitian metode

gayaberat ditunjukkan perbedaan nilai gayaberat dari suatu tempat ke tempat lainnya. Adanya perbedaan pembacaan nilai gayaberat dalam suatu titik di permukaan bumi dipengaruhi beberapa faktor diantaranya variasi topografi, variasi ketinggian, pasang surut, guncangan pada pegas alat, lintang, dan variasi densitas bawah permukaan. Dalam metode gayaberat dikenal beberapa koreksi meliputi pasang surut bumi (tidal), apungan (*tide*), garis lintang (*latitude*), koreksi udara (*free air*), koreksi Bouguer, topografi (*terrain*).

2.3.1 Koreksi Pasang Surut (*Tide*)

Koreksi ini dilakukan untuk menghilangkan pengaruh gravitasi benda-benda di luar bumi seperti bulan dan matahari yang berubah terhadap lintang dan waktu. Penurunan efek tidal ini hampir sebagian besar menggunakan persamaan Longman:

$$tide = (r) + \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 (\sin 2\theta_m) + \frac{1r}{6c} \left(\frac{c}{R} \right)^4 (5 \cos 3\theta_m + 3 \cos 3\theta_m) \right] \quad (2-$$

10)

Dalam praktiknya, koreksi tidal dilakukan dengan cara mengukur nilai gayaberat di stasiun yang sama (base) pada interval waktu tertentu. Kemudian bacaan gravimeter tersebut diplot terhadap waktu agar menghasilkan suatu persamaan yang digunakan untuk menghitung koreksi tidal. Nilai koreksi tidal ini selalu ditambahkan pada pembacaan gayaberat.

$$g_t = g_{obs} + tide_{obs} \quad (2-11)$$

dengan : g_t = gayaberat terkoreksi tidal (mGal)

g_{obs} = gayaberat bacaan (mGal)

$tide_{obs}$ = koreksi tidal (mGal)

2.3.2 Koreksi Apungan (*drift*)

Koreksi *drift* akibat adanya perbedaan pembacaan gayaberat dari stasiun yang sama pada waktu yang berbeda, yang disebabkan karena adanya guncangan pegas alat gravimeter selama proses transportasi dari suatu stasiun ke stasiun lainnya. Untuk menghilangkan efek ini, akuisisi data gayaberat didesain dalam suatu rangkaian tertutup (*loop*), sehingga besar penyimpangan tersebut dapat diketahui dan diasumsikan linier pada selang waktu tertentu. Koreksi *drift* pada masing-masing titik stasiun adalah:

$$drift_n = \frac{g_{akhir} - g_0}{t_{akhir} - t_0} (t_n - t_0) \quad (2-12)$$

$$g_{lokal} = (g_t - drift_n) \quad (2-13)$$

dengan : t_n = waktu pembacaan pada stasiun ke-n (sekon)

t_0 = waktu pembacaan pada awal looping (sekon)

t_{akhir} = waktu pembacaan pada akhir looping (sekon)

g_0 = bacaan gravimeter terkoreksi tidal pada awal looping (mGal)

g_{akhir} = bacaan gravimeter terkoreksi tidal pada akhir looping (mGal)

g_{lokal} = gayaberat terkoreksi drift dan tidal (mGal)

$drift_n$ = besarnya koreksi drift pada stasiun ke-n (mGal)

g_t = gayaberat terkoreksi tidal (mGal)

2.3.3 Koreksi Lintang

Koreksi ini dilakukan karena bentuk bumi yang tidak sepenuhnya bulat sempurna, tetapi pepat pada daerah ekuator dan juga karena rotasi bumi. Hal tersebut membuat adanya perbedaan nilai gravitasi karena pengaruh lintang yang ada di bumi. Dengan demikian nilai gayaberat di kutub akan lebih besar dibandingkan nilai gayaberat di khatulistiwa. Adanya perbedaan ini, maka koreksi lintang sangat

memengaruhi besar gayaberat di satu daerah. Secara sistematis, anomali medan gravitasi di topografi dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan berikut :

$$\Delta g(x,y,z) = g_{\text{obs}}(x,y,z) - g_{\text{teoritis}}(x,y,z) \quad (2-14)$$

Dengan $\Delta(x,y,z)$ merupakan anomali medan gravitasi di topografi, dan $g_{\text{obs}}(x,y,z)$ adalah medan gravitasi observasi di topografi yang sudah dikoreksikan terhadap koreksi pasang surut, koreksi tinggi alat dan koreksi drift. Sedangkan $g_{\text{teoritis}}(x,y,z)$ merupakan medan gravitasi teoritis di topografi.

Medan gravitasi teoritis yang ditentukan lebih awal adalah medan gravitasi normal yang terletak pada bidang datum (pada ketinggian $z=0$) sebagai titik referensi geodesi. Rumusan medan gravitasi normal pada bidang datum ini telah ditetapkan oleh *The International Association of Geodesy System* (IAG 1967) yang diberi nama *Geodetic Reference System* 1980 (GRS80) sebagai fungsi lintang, yaitu:

$$g_{\varphi} = 978032.700 (1 + 0.0053024 \sin 2\varphi - 0.0000058 \sin 22\varphi) \quad (2-15)$$

dengan: g_{φ} = gayaberat terkoreksi lintang (mGal)

φ = sudut lintang (radian)

Dari persamaan (2-14) terlihat bahwa semakin tinggi letak lintangnya, maka semakin besar percepatan gravitasinya. Jadi, medan gravitasi bumi cenderung bertambah besar ke arah kutub.

2.3.4 Koreksi Udara Bebas (*Free Air Correction*)

Koreksi Udara Bebas (*Free Air Correction*) dilakukan untuk menghilangkan efek topografi atau efek ketinggian yang mempengaruhi nilai pembacaan nilai gayaberat tanpa memperhatikan efek dari massa batuan. Dengan kata lain koreksi udara bebas merupakan perbedaan gayaberat yang diukur pada *mean sea level* (*geoid*) dengan gayaberat yang diukur pada ketinggian h meter dengan tidak ada batuan diantaranya. Nilai gayaberat pada mean sea level dengan menganggap

bentuk bumi yang ideal, *spheroid*, tidak berotasi, dan massa terkonsentrasi pada pusatnya, yaitu:

$$g_0 = G \frac{M}{R^2} \quad (2-16)$$

Nilai gayaberat pada stasiun pengukuran dengan elevasi h (meter) dari *mean sea level* (Iwan, 2012) adalah:

$$g_h = G \frac{M}{(R+h)^2} = g_0 h \frac{\partial g_0}{\partial R} \quad (2-16)$$

Perbedaan nilai gayaberat antara yang terletak pada *mean sea level* dengan titik yang terletak pada elevasi h (meter) adalah koreksi udara bebas (FAC) diberikan persamaan sebagai berikut (Karunianto, Haryanto, Hikmatullah, & Laensapura, 2017).

$$FAC = \partial g_f = \frac{\partial g_0}{\partial R} h = \frac{\partial(G \frac{M}{R^2})}{\partial R} h = -\frac{2GM}{R^3} h = -\frac{2g_0}{R} h = -0.3085 \times h \quad (2-17)$$

dengan: $g_0 = 981785$ mGal

$R = 6371000$ meter

$M = 5.97 \times 10^{27}$ gram

Sehingga besarnya anomali pada posisi tersebut menjadi :

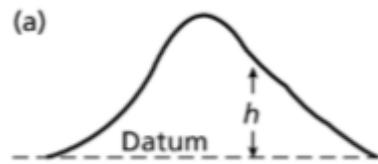
$$FAA = g_{obs} - g_{\varphi} + FAC \quad (2-18)$$

dengan : $FAA = Free Air Anomaly$ (mGal)

g_{obs} = gayaberat observasi (mGal)

g_{φ} = gayaberat teoritis pada lintang (mGal)

$FAC = Free Air Correction$ (mGal)



Gambar 2. 3 Koreksi Udara Bebas terhadap gayaberat (Kearey & Brooks, 1991)

2.3.5 Koreksi Bouguer (*Bouguer Correction*)

Koreksi Bouguer merupakan koreksi ketinggian yang memperhitungkan adanya efek dari massa batuan yang berada di antara bidang datum (*geoid*) dan titik amat dengan asumsi memiliki jari-jari tak terhingga dengan tebal h (meter) dan densitas ρ (gr/cm³). Sehingga koreksi bouguer dapat ditulis sebagai berikut:

$$BC = 0.0429 \times \rho \times h \text{ mGal} \quad (2-19)$$

dengan : ρ = rapat massa rata-rata daerah penelitian (gr/cm³)

h = ketinggian titik amat (m)

Anomali gayaberat setelah diaplikasikan koreksi udara bebas dan koreksi Bouguer yaitu:

$$SBA = FAA - BC \quad (2-20)$$

dengan: SBA = *Simple Bouguer Anomaly* (mGal)

FAA = *Free Air Anomaly* (mGal)

BC = *Bouguer Correction* (mGal)



Gambar 2. 4 Koreksi Bouguer terhadap gayaberat (Kearey & Brooks, 1991)

2.1.6 Koreksi Medan (*Terrain Correction*)

Koreksi medan mengakomodir ketidak teraturan pada topografi sekitar titik pengukuran (Gambar 2.3). Pada saat pengukuran, elevasi topografi di sekitar titik pengukuran, biasanya dalam radius dalam dan luar, diukur elevasinya. Sehingga koreksi ini dapat ditulis sebagai berikut :

$$TC = \frac{2\pi G\rho}{n} (r_L - r_D) + (\sqrt{r_L^2 - z^2}) - (\sqrt{r_D^2 - z^2}) \text{ mGal} \quad (2-22)$$

dengan: r_L dan r_D = radius luar dan radius dalam kompartemen

z = perbedaan elevasi rata-rata kompartemen

n = jumlah segmen dalam zona tersebut

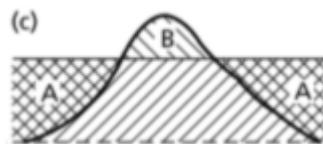
Karena komponen gaya horizontal (koreksi medan) bersifat mengurangi nilai gayaberat terukur, maka koreksi medan harus ditambahkan pada *Simple Bouguer Anomaly* (SBA), sehingga anomali menjadi *Complete Bouguer Anomaly* (CBA).

$$CBA = SBA + TC \quad (2-23)$$

dengan: CBA = *Complete Bouguer Anomaly* (mGal)

SBA = *Simple Bouguer Anomaly* (mGal)

TC = *Terrain Correction* (mGal)



Gambar 2.5 Koreksi medan terhadap data gayaberat (Kearey & Brooks, 1991)

2.4 Analisis Spektrum

Analisis spektrum dilakukan untuk mengestimasi kedalaman sumber anomali dan menganalisis sinyal berdasarkan frekuensi dan panjang gelombangnya. Analisis

spektrum dilakukan dengan melakukan Transformasi Fourier anomali gayaberat pada lintasan-lintasan yang dipilih. Persamaan transformasi Fouriernya yaitu :

$$F(U) = G\mu F\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2.24)$$

$$F\left(\frac{1}{R}\right) = 2\pi \frac{e^{|k|(z_0-z')}}{|k|} \quad (2.25)$$

dimana :
 U = Potensial gayaberat
 G = Konstanta gayaberat
 μ = Anomali rapat massa
 r = Jarak
 k = Bilangan gelombang
 z_0 = Ketinggian titik amat
 z' = Kedalaman benda anomali

Jika distribusi rapat massa bersifat random dan tidak adanya korelasi antara masing-masing nilai gayaberat, maka $2\pi\gamma\mu = 1$ sehingga hasil dari transformasi fourier anomali gayaberat menjadi :

$$A = C e^{|k|(z_0-z')} \quad (2.26)$$

dimana :
 A = Amplitudo (meter)
 C = Konstanta

Estimasi lebar jendela dilakukan untuk menentukan lebar jendela yang digunakan untuk pemisahan data regional dan residual. nilai estimasi lebar jendela dapat diperoleh dengan meng-algoritma-kan spektrum amplitudo yang dihasilkan dari persamaan di atas sehingga menghasilkan persamaan garis lurus, dimana komponen k akan berbanding lurus dengan spektrum amplitudonya.

$$\ln A = (z_0 - z_1)|k| \quad (2.27)$$

Melalui regresi linear diperoleh batas antara orde satu (zona regional) dan orde dua (zona residual), sehingga nilai k pada batas orde satu dan orde dua

diambil untuk menentukan lebar jendela. Hubungan panjang gelombang dengan k yaitu (Karunianto, Haryanto, Hikmatullah, & Laesanpura, 2007) :

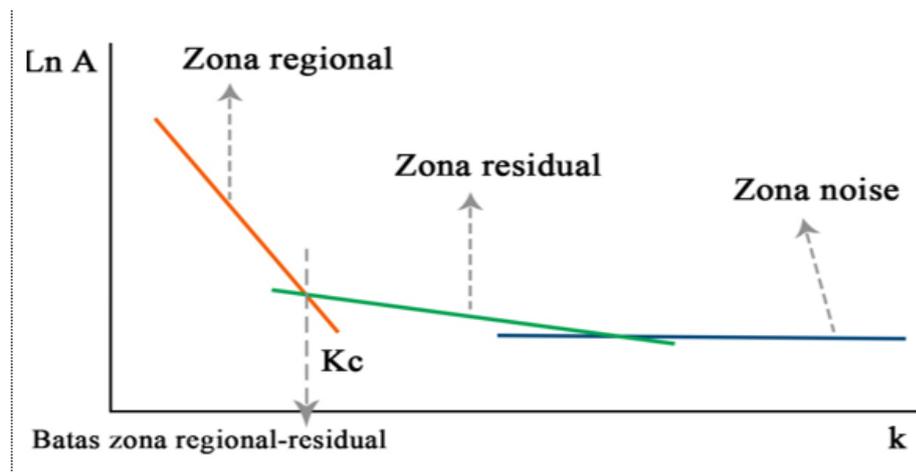
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.28)$$

$$\lambda = n \cdot \Delta x \quad (2.29)$$

sehingga :

$$n = \frac{2\lambda}{\Delta x} \quad (2.30)$$

Dalam proses estimasi kedalaman diperoleh nilai gradien persamaan garis lurus dari orde satu dan orde dua, dimana nilai gradien hasil regresi orde satu menunjukkan kedalaman regional dan nilai regresi linear orde dua menunjukkan kedalaman residual.



Gambar 2. 6 Kurva Ln A terhadap k (Blakely, 1996).

2.6 *Second Vertical Derivative (SVD)*

Second Vertical Derivative (SVD) dilakukan untuk memunculkan efek dangkal dari pengaruh regionalnya dan untuk menentukan batas-batas struktur yang ada di

daerah penelitian. Sehingga filter ini dapat menyelesaikan anomali residual yang tidak mampu dipisahkan dengan metode pemisahan regional dan residual yang ada. Secara teoritis, metode ini diturunkan dari persamaan *Laplace's*:

$$\nabla^2 \Delta g = 0 \text{ dimana } \nabla^2 \Delta g = \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial z^2} \quad (2-31)$$

Sehingga persamaannya menjadi:

$$\frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial z^2} = 0 \quad (2-32)$$

$$\frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial z^2} = -\left[\frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial y^2}\right] \quad (2-33)$$

Untuk data penampang 1D, dimana y mempunyai nilai yang tetap, maka persamaannya adalah:

$$\frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial z^2} = -\left[\frac{\partial^2(\Delta g)}{\partial x^2}\right] \quad (2-34)$$

Dari persamaan-persamaan sebelumnya dapat diketahui bahwa *Second Vertical Derivative* dari suatu anomali gayaberat permukaan adalah sama dengan negatif dari *derivative* dapat melalui *derivative* orde dua horizontalnya yang lebih praktis dikerjakan. Terdapat beberapa operator filter SVD, yang dihitung oleh Henderson dan Zeits (1949), Elkins (1951), dan Rosenbach (1952). Dalam penelitian ini digunakan filter SVD hasil Elkins.

2.7 Forward Modeling (Pemodelan ke Depan)

Pemodelan struktur bawah permukaan dilakukan dengan cara pemodelan ke depan (*forward modeling*). *Forward modeling* (pemodelan ke depan) adalah suatu metode interpretasi yang memperkirakan densitas bawah permukaan dengan membuat terlebih dahulu benda geologi bawah permukaan (Shafie, Hamzah, & Samsudin, 2014). Dalam pemodelan dicari suatu model yang cocok atau fit dengan data lapangan, sehingga model tersebut dianggap mewakili kondisi bawah permukaan di daerah pengukuran. Pemodelan ke depan dilakukan untuk

menghitung efek gayaberat model benda bawah permukaan dengan penampang berbentuk sembarang yang dapat diwakili oleh suatu poligon bersisi n dinyatakan sebagai integral garis sepanjang sisi-sisi poligon.

Pemodelan ke depan (*forward modeling*) merupakan proses perhitungan data dari hasil teori yang akan teramati di permukaan bumi jika parameter model diketahui. Pada saat melakukan interpretasi, dicari model yang menghasilkan respon yang cocok dan *fit* dengan data pengamatan atau data lapangan, sehingga diharapkan kondisi model itu bisa mewakili atau mendekati keadaan sebenarnya. Seringkali istilah *forward modeling* digunakan untuk proses *trial and error*. *Trial and error* adalah proses coba-coba atau tebakan untuk memperoleh kesesuaian antara data teoritis dengan data lapangan. Diharapkan dari proses *trial and error* ini diperoleh model yang cocok responnya dengan data (Umboh et al., 2018).

Pada pemodelan ke depan 2,5 dimensi dilakukan untuk mengetahui efek gravitasi benda bawah permukaan dengan penampang berbentuk sembarang yang dapat diwakili oleh suatu poligon bersisi n yang dinyatakan sebagai integritasi garis sepanjang sisi-sisi poligon. Secara teoritis, pemodelan ini diturunkan dari persamaan Talwani:

$$g_z = 2G\rho \oint z d\theta \quad (2-35)$$

Integral garis tersebut dapat pula dinyatakan sebagai jumlah garis tiap sisinya, sehingga persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$g_z = 2G\rho \int_{t=1}^n g_1 \quad (2-36)$$

Model benda anomali sembarang Talwani didekati dengan poligon poligon dengan sistem koordinat kartesian, yang dapat ditunjukkan dengan persamaan sebagai berikut:

$$g_1 = \frac{\int_b^a a_1 \tan\theta_1}{\tan\varphi_1 - \tan\theta} d\theta \quad (2-37)$$

Sehingga diperoleh:

$$g_1 = a_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \{(\theta_1 + \theta_2) \ln \left(\frac{\cos \theta_1 (\tan \theta_1 - \tan \varphi_1)}{\cos \theta_2 (\tan \theta_2 - \tan \varphi_1)} \right)\} \quad (2-38)$$

dimana:

$$a_1 = x_2 - z_2 \cot \varphi_1 = x_2 - z_2 \left(\frac{x_2 - z_1}{x_2 - z_1} \right) \quad (2-39)$$

dengan:

$$\theta_1 = \tan^{-1} \left(\frac{z_1}{x_1} \right) \quad (2-40)$$

$$\varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{z_2 + z_1}{x_2 + x_1} \right) \quad (2-41)$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk sederhana, dengan mensubstitusikan harga-harga $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, dan $\tan \varphi$ dengan koordinat titik sudut poligon pada sumbu x dan z, sebagai berikut:

$$z_1 = \frac{a_1 c}{c^2 + 1} \left\{ \theta_1 - \theta_2 + \frac{1}{2} C \left(\frac{x_2^2 - z_2^2}{x_1^2 - z_1^2} \right) \right\} \quad (2-42)$$

Persamaan di atas dijadikan sebagai dasar perhitungan mod bawah permukaan yang berbentuk perangkat lunak (*Software*). Dalam pemodelan dilakukan menggunakan *Software Geosoft Oasis Montaj*.

2.8 Inverse Modelling (Pemodelan Inversi)

Proses inversi adalah suatu proses pengolahan data lapangan yang melibatkan teknik penyelesaian matematika dan statistik untuk mendapatkan informasi yang berguna mengenai distribusi sifat fisis bawah permukaan. Di dalam proses inversi, dilakukan analisis terhadap data lapangan dengan cara melakukan *curve fitting* (pencocokan kurva) antara model matematika dan data lapangan. Tujuan dari proses inversi adalah untuk mengestimasi parameter fisis batuan yang tidak diketahui sebelumnya (*unknown parameter*) (Sihombing, 2017).

Dalam penyelesaian permasalahan inversi linier menggunakan persamaan (2.43) kesalahan atau ketelitian data belum diperhitungkan. Padahal kesalahan data

sangat berpengaruh pada solusi yang diperoleh sebagaimana dapat dilihat pada pembahasan singkat mengenai konsep *norm* di atas. Misalnya, jika dalam satu set data terdapat satu atau beberapa data dengan tingkat kesalahan yang sangat besar atau "*outliers*" maka hasil inversi menggunakan metode kuadrat terkecil adalah garis regresi L2 yang sebenarnya bukan merupakan solusi yang diharapkan. Jika data tidak mengandung "*outliers*" maka hasil inversi akan mirip atau dekat dengan garis regresi L1.

$$m = [G^T G]^{-1} G^T d \quad (2-43)$$

Metode inversi yang baik hendaknya dapat memperhitungkan tingkat kesalahan data atau ketelitian data dalam proses penyelesaian inversi. Dengan demikian solusi yang diperoleh secara obyektif sesuai dengan kualitas data. Umumnya pengaruh data dengan kesalahan cukup besar (atau tingkat ketelitian rendah) harus diminimumkan agar hasil inversinya merupakan representasi data dengan tingkat ketelitian yang baik. Hal tersebut dapat dilakukan melalui pembobotan data dalam penyelesaian masalah inversi.

Pada dasarnya kita dapat memberikan bobot relatif pada data sedemikian hingga data dengan kesalahan besar tidak akan berpengaruh pada solusi inversi. Dengan kata lain, solusi inversi akan lebih ditentukan oleh data yang berkualitas baik. Faktor pembobot data ke-*i* atau w_i dimasukkan pada perhitungan kesalahan kuadratik sehingga diperoleh:

$$E = \sum_{i=1}^N w_i (d_i^{cal} - d_i^{obs})^2 \quad (2-44)$$

Jika data dianggap memiliki kesalahan cukup besar maka diberi bobot kecil agar kontribusi pada penjumlahan pada persamaan (2.44) tidak terlalu signifikan. Sebagai contoh, apabila pada salah satu data dianggap memiliki kesalahan cukup besar ("*outlier*"). Jika informasi lain tidak tersedia maka kita dapat memberikan bobot konstan untuk semua data kecuali data yang dianggap meragukan sehingga $[w_i] = [\dots 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0.1]$. Jika informasi mengenai tingkat ketelitian data tersedia lebih lengkap (misalnya dari statistik data) maka pembobotan dapat dilakukan

dengan mengacu pada tingkat ketelitian data tersebut dan tidak bersifat subyektif dengan menggunakan harga ekstrim seperti pada contoh di atas.

Pemberian bobot secara lebih obyektif dapat dilakukan dengan menggunakan standar deviasi data sebagai bobot sehingga persamaan (2.44) menjadi:

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{d_i^{cal} - d_i^{obs}}{\sigma_i} \right)^2 \quad (2-45)$$

Dalam hal ini $w_i = \sigma_i^{-2}$ adalah kuadrat dari standar deviasi atau variansi. Data dengan ketelitian rendah memiliki standar deviasi yang besar sehingga bobotnya kecil dan sebaliknya data dengan ketelitian tinggi memiliki standar deviasi yang kecil sehingga bobotnya besar.

Penggunaan standar deviasi sebagai bobot juga dapat diartikan bahwa data yang tidak terlalu akurat (dengan standar deviasi cukup besar) akan memberikan toleransi yang juga cukup besar pada data prediksi (d_{cal}) untuk dianggap cocok dengan data hasil pengamatan. Demikian pula sebaliknya, perbedaan kecil antara data perhitungan dengan data pengamatan yang cukup teliti (dengan standar deviasi kecil) akan memberikan kontribusi cukup besar pada perhitungan kesalahan kuadratik total yang harus diminimumkan pada persamaan (2-45). Oleh karena itu harus dicari model yang responsnya sangat dekat dengan data yang cukup teliti tersebut agar menghasilkan kesalahan total minimum.

Secara lebih umum pembobotan data dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sehingga persamaan (2-44) atau (2-45) dalam notasi matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E = e^T W_e e = [d - Gm]^T W_e [d - Gm] \quad (2-46)$$

Untuk kasus yang lebih umum maka W_e bukan berbentuk matriks diagonal, namun $W_e = C$ dimana matriks C disebut sebagai matriks ko-variansi (*covariance*) dengan elemen-elemen sebagai berikut:

$$c_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (2-47)$$

Solusi permasalahan inversi linier dengan pembobotan data dapat diperoleh dan dapat dibuktikan bahwa hasilnya adalah sebagai berikut:

$$m = [G^T W e G]^{-1} G^T W e d \quad (2-48)$$

Pada umumnya untuk menyederhanakan masalah maka data dianggap tidak terkorelasi satu dengan yang lainnya atau independen sehingga matriks pembobot $W e$ adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal adalah variansi data. Inversi linier dengan pembobotan data sangat umum digunakan untuk memperoleh solusi yang optimal. Metode inversi linier berbobot sering disebut sebagai *weighted linear inversion*.

Pada pemodelan invesi 3 dimensi digunakan untuk mendapatkan pola struktur bawah permukaan dari data gayaberat, maka anomali Bouguer hasil pengukuran dan perhitungan harus dilakukan pemodelan baik dengan metode *forward modelling* atau *inversion modelling* sehingga akan diketahui distribusi densitas dan struktur di daerah penelitian. Selanjutnya berdasarkan distribusi densitas tersebut dilakukan interpretasi dengan menggabungkan data-data geologi yang ada di daerah tersebut sehingga akan diperoleh struktur bawah permukaan di daerah tersebut.