J. Math. and Its Appl.
E-ISSN: 2579-8936
P-ISSN: 1829-605X
Vol. 15, No. 1, Maret 2018, 71-78

Dimensi Metrik Graf Amal($\boldsymbol{nK_m}$)

[1]Tri Utomo, Novian Riskiana Dewi
[1]Affiliasi : Institut Teknologi Sumatera (ITERA)
[1]Program Studi Matematika, Jurusan Sains, ITERA Lampung Selatan Indonesia
e-mail : tri.utomo@ma.itera.ac.id

Abstrak

Salah satu topik dalam teori graf yang menarik sebagian besar para peneliti adalah tentang dimensi metrik, yaitu kardinalitas minimum *resolving set* yang mungkin dapat dibentuk dari suatu graf. Pada paper ini dibahas tentang dimensi metrik graf Amal(nK_m), yaitu graf yang dibangun dari topologi jaringan komputer. Graf ini dibentuk berdasarkan n buah jaringan komputer topologi mesh yang dihubungkan menjadi satu-kesatuan jaringan komputer yang lebih besar dengan menggunakan topologi mesh. Dengan kata lain, n buah graf komplit K_m dioperasikan amalgamasi dengan graf Komplit K_n. Graf ini dinotasikan sebagai Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$. Dengan menentukan batas bawah dan batas atas kardinalitas *resolving set* dari Amal(nK_m) didapatkan bahwa dimensi metrik dari graf Amal(nK_m) adalah $(m-2)n$.

Kata Kunci: Resolving Set, Dimensi Metrik, Topologi Jaringan Komputer

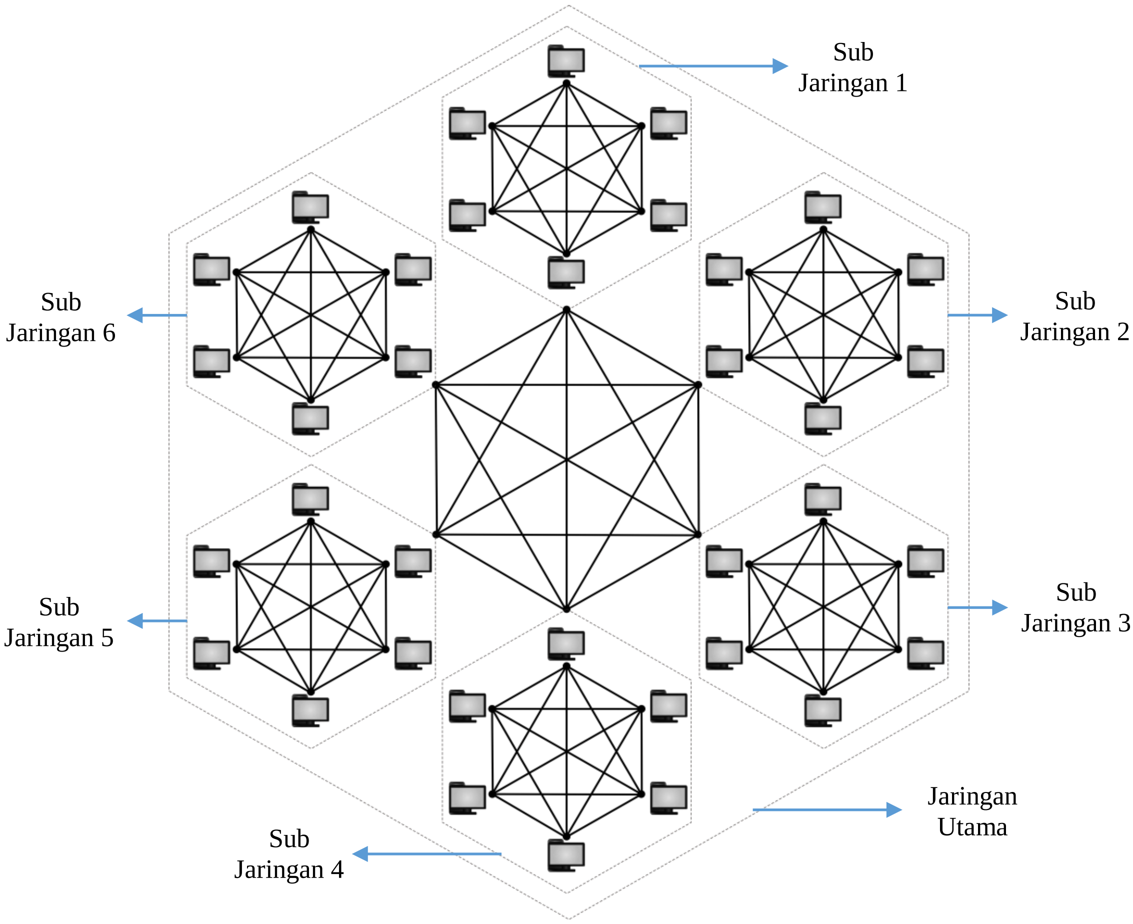
Abstract

One of the topic in graph theory that attract the researcher is metric dimension, that is the minimum cardinality of resolving set of graph. This study aim to find the metric dimension of Amal(nK_m), that is the graph that obtained from computer network topology. This graph is n of computer network topology of mesh are merged being unity more bigger network using mesh topology. In other word, n of complete graph K_m is amalgamation by complete graph K_n. It is denoted by Amal(nK_m), where $n \geq 4$ and $m \geq 4$. By finding lower bound and upper bound of cardinality its resolving set of that graphs, it conclude that the metric dimension of Amal(nK_m) is $(m-2)n$.

***Keywords**: Resolving Set, Metric Dimension, Computer Network Topology*

1 Pendahuluan

Graf adalah himpunan simpul dan sisi yang berhingga, didefinisikan sebagai $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tak kosong simpul dan E adalah himpunan sisi. Setiap sisi menghubungkan satu simpul dengan simpul yang lain, dan setiap simpul dapat mempunyai banyak sisi yang menghubungkannya dengan simpul lainnya. Beberapa permasalahan pada disiplin ilmu dapat dimodelkan dalam bentuk graf. Sebagai contoh pada [1] graf digunakan sebagai model dari kompetisi antara spesies berbeda pada ekologi lingkungan, siapa yang mempengaruhi atau siapa yang berada pada himpunan kelas yang sama. Selain itu pada [2] [3], graf digunakan untuk mengilustrasikan jaringan lalu lintas, jaringan komputer [4] [5], dan sebagainya. Pada paper ini graf digunakan sebagai representasi dari jaringan komputer, yaitu dengan mengilustrasikan komputer sebagai simpul dan jaringan yang menghubungkan antar komputer sebagai sisi. Ada beberapa jenis topologi jaringan komputer, diantaranya topologi bus, ring, star, dan mesh. Pada penelitian ini dibahas tentang dimensi metrik suatu graf yang dibangun dari kombinasi topologi jaringan komputer tersebut. Yang dimaksudkan kombinasi dalam penelitian ini yaitu beberapa jaringan komputer (sub jaringan komputer) digabungkan menjadi satu-kesatuan membentuk jaringan komputer yang lebih besar (jaringan komputer utama), dalam hal ini topologi mesh dengan topologi mesh, perhatikan **Gambar 1**.



Gambar 1 Ilustrasi 6 buah jaringan komputer bertopologi mesh (sub jaringan) dihubungkan menjadi satu-kesatuan membentuk jaringan komputer yang lebih besar menggunakan topologi mesh

Permasalahan dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Harary dan Melter [6], selain itu diteliti juga oleh Slater [7]. Misal $G = (V, E)$ adalah graf terhubung sederhana, dan $u, v \in V$, jarak antara dua simpul u dan v dinotasikan sebagai $d(u, v)$ didefinisikan sebagai panjang jalur terpendek yang menghubungkan keduanya. Misal $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ himpunan simpul terurut subset V, dan $v \in V$, representasi v terhadap W dinotasikan sebagai $r(v|W)$ adalah k-tupel $\big(d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)\big)$. W dinamakan *resolving set* jika setiap simpul pada G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W. *Resolving set* dengan kardinalitas minimum disebut sebagai *resolving set* minimum, sedangkan kardinalitas dari *resolving set* ini disebut sebagai dimensi metrik dari graf G, dinotasikan sebagai Dim(G).

Dimensi metrik merupakan salah satu topik pada teori graf yang menarik bagi para peneliti, beberapa hasi telah didapatkan, misalnya [6] mendapatkan hasil sebagai berikut

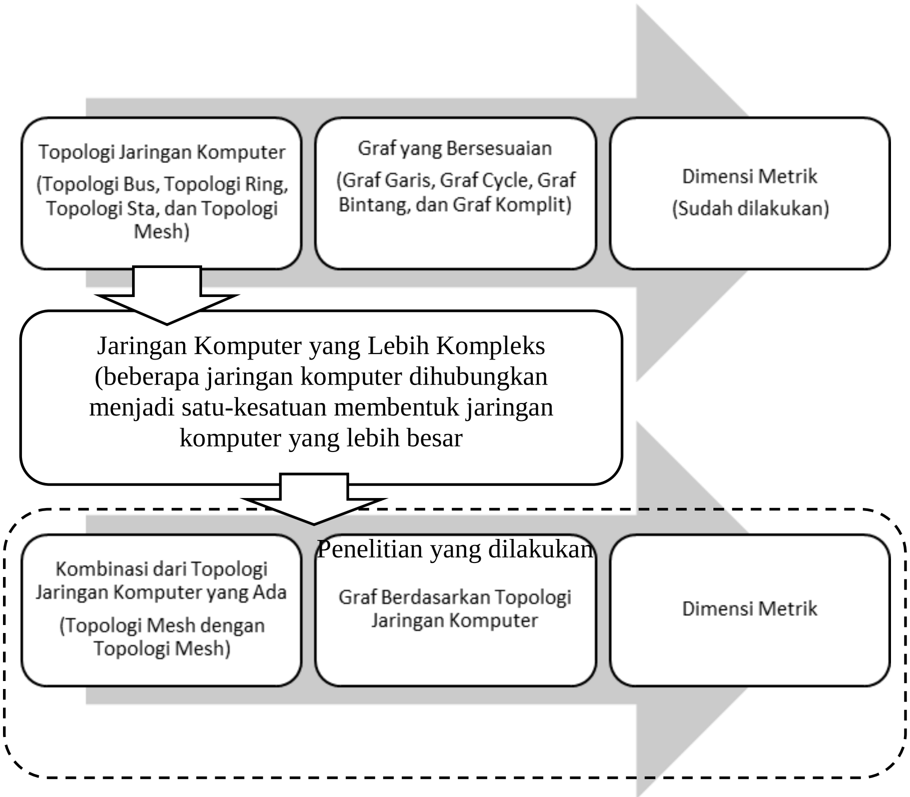
Teorema 1 [6] Misal G graf terhubung dengan orde $n \geq 2$, maka

1. Dim(G) $= 1$ jika dan hanya jika $G = P_n$
2. Dim(G) $= n - 1$ jika dan hanya jika $G = K_n$
3. Untuk $n > 3$, maka Dim(C_n) $= 2$

Sedangkan [8] membahas dimensi metrik graf yang dihasilkan dari operasi perkalian lexicographic, selain itu [9] membahas dimensi metrik lokal dari graf yang memiliki m-pendant, [10] membahas dimensi metrik pada beberapa graf reguler infinit, [11] membahas graf-graf yang memuat sikel dan yang memiliki dimensi metrik konstan, dan [12] membahas dimensi metrik dari pengembangan graf kincir.

2 Metode Penelitian

Dalam mengerjakan penelitian ini, dilakukan kontruksi graf berdasarkan topologi jaringan komputer. Setelah itu dilakukan observasi mengenai dimensi metrik dari graf yang telah didapatkan pada tahapan sebelumnya. Dalam menentukan dimensi metrik ini diperlukan batas bawah dan batas atas dimensi metrik dari graf tersebut.



Gambar 2 Metodologi Penelitian

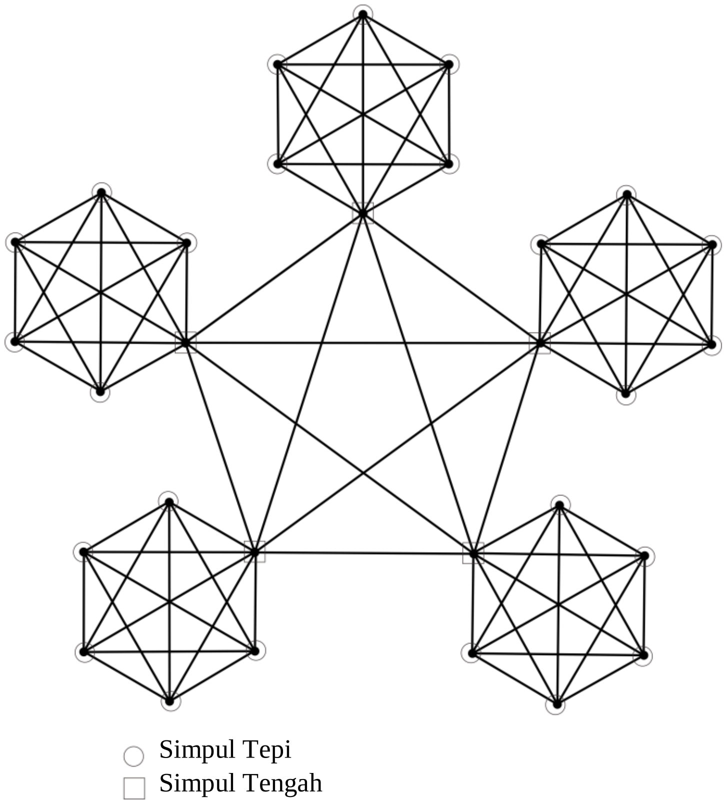
Berdasarkan penjelasan diatas, dalam melakukan penelitian ini dapat dituliskan tahapan-tahapan pengerjaannya sebagai berikut

1. Membentuk suatu graf berdasarkan topologi jaringan komputer
2. Menentukan batas bawah dimensi metrik.
3. Menentukan batas atas dimensi metrik.
4. Menentukan nilai eksak dimensi metrik bedasarkan batas bawah dan batas atas dimensi metrik.

3 Hasil dan Pembahasan

3.1. Amalgamasi n-Graf Komplit

Graf yang dibahas pada paper ini terinspirasi dari topologi jaringan komputer, dengan mengilustrasikan komputer sebagai simpul, dan jaringan yang menghubungkan komputer sebagai sisi. Ada beberapa jenis topologi pada jaringan komputer, yaitu topologi bus, ring, star, dan mesh, sama halnya dengan graf garis, cycle, graf bintang, and graf komplit pada teori graf. Pada paper ini dibentuk suatu jaringan komputer yang lebih besar dengan mengkombinasikan topologi-topologi tersebut, dalam hal ini topologi mesh dengan topologi mesh, topologi mesh pada masing-masing sub jaringan komputer dan topologi mesh pada jaringan komputer utama, perhatikan **Gambar 1**.



Gambar 3 Contoh graf Amal($5K_6$), yaitu 5 buah graf K_6 diamalgamasikan dengan graf K_5

Kombinasi dari topologi mesh dengan topologi mesh mempunyai arti bahwa terdapat beberapa jaringan komputer bertopologi mesh (sub jaringan komputer) dihubungkan menjadi satu-kesatuan membentuk jaringan komputer yang lebih besar (jaringan komputer utama) menggunakan topologi mesh. Ini mengilustrasikan bahwa, n buah graf komplit K_m dioperasikan amalgamasi dengan graf komplit K_n, dengan cara menyatukan simpul server pada setiap K_m tepat satu dengan tiap simpul pada K_n. Graf ini kemudian dinotasikan sebagai Amal(nK_m), dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, perhatikan **Gambar 3**. Untuk keperluan selanjutnya, didefinisikan dua jenis simpul pada Amal(nK_m), yaitu simpul tepi dan simpul tengah. Simpul tepi mengilustrasikan komputer client pada setiap topologi mesh K_m. Sedangkan simpul tengah mengilustrasikan komputer server pada setiap topologi mesh K_m yang disatukan dengan komputer pada topologi mesh K_n.

3.2. Dimensi Metrik Amal(nK_m)

Misal G adalah Amal(nK_m) seperti yang sudah didefinisikan sebelumnya, maka graf G adalah graf terhubung sederhana.

Teorema 2 Batas bawah: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, maka Dim(G) $\geq (m-2)n$

Bukti: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, W adalah resolving set, dan $a_{i,j}$ merupakan simpul tepi dari G dengan $i = 1,2,\ldots,n$ and $j = 1,2,\ldots,(m-2)$. Simpul tepi $a_{1,k}$ dengan $k = 1,2,\ldots,(m-1)$ pada K_m pertama, mempunyai jarak yang sama terhadap simpul lainya pada G. Ini mengartikan bahwa simpul-simpul tersebut memiliki representasi yang sama terhadap W, maka salah satu dari simpul-simpul ini haruslah berada di luar W, atau dapat ditulis sebagai $a_{1,j} \subset W$. Dengan cara yang sama untuk simpul-simpul tepi pada K_m lainya, dapat ditunjukkan bahwa $a_{2,j}, a_{3,j}, \ldots, a_{n,j} \subset W$. Akibatnya, W haruslah setidaknya memuat $a_{1,j} \cup a_{2,j} \cup a_{3,j} \cup \ldots \cup a_{n,j}$, dan ini jelas bawah $a_{i,j}$ where $i = 1,2,\ldots,n$ and $j = 1,2,\ldots,(m-2)$ merupakan simpul-simpul yang berbeda. sehingga $|a_{1,j}| = |a_{2,j}| = |a_{3,j}| = \cdots = |a_{n,j}| = (m-2)$, dan $|W| \geq (m-2)n$. ■

Teorema 3 Batas atas: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, maka Dim(G) $\leq (m-2)n$

Bukti: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, $W = a_{1,j} \cup a_{2,j} \cup a_{3,j} \cup \ldots \cup a_{n,j}$ dengan $j = 1,2,\ldots,(m-2)$, dan $a_{i,j}$ adalah simpul tepi dari G. Karena $a_{i,j}$ dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,(m-2)$ merupakan simpul-simpul yang berbeda, maka $|W| = (m-2)n$. selanjutnya akan ditunjukkan bahwa W merupakan resolving set.

Pertama, representasi dari simpul tengah terhadap W akan selalu 2, kecuali simpul tengah yang adjacent dengan simpul tepi pada G. Representasi simpul tengah yang adjacent dengan simpul tepi pada G terhadap W adalah 1. Ini mengakibatkan representasi simpul tengah akan berbeda pada peletakan urutan 1 dan 2. Kedua, simpul tepi pada G $a_{i,j}$ dengan $i = 1,2,\ldots,n$ dan $j = 1,2,\ldots,(m-1)$ mempunyai representasi terhadap W sama dengan 0 dengan dirinya sendiri, dan akan selalu 1 dengan simpul tepi pada G yang adjacent dengan simpul tengah yang sama, dan selainnya akan selalu mempunyai representasi terhadap W sama dengan 3. Ini mengakibatkan representasi simpul tepi akan berbeda pada peletakan urutan 0,1, dan 3. Karena representasi setiap simpul pada G terhadap W berbeda, dapat disimpulkan bahwa W merupakan resolving set.

Dari penjelasan sebelumnya dikatakan bahwa W minimal memuat $a_{1,j} \cup a_{2,j} \cup a_{3,j} \cup \ldots \cup a_{n,j}$ dengan $j = 1,2,\ldots,(m-2)$, dan $|a_{1,j} \cup a_{2,j} \cup a_{3,j} \cup \ldots \cup a_{n,j}| = (m-2)n$, jadi tidak mungkin dibentuk W *resolving set* sehingga $|W| < (m-2)n$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa W merukan minimum *resolving set* yang dapat dibentuk. ■

Teorema 4 Dimensi metrik: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, maka Dim(G) = $(m-2)n$

Bukti: Misal G adalah Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, dari penjelasan diatas kita ketahui bahwa batas bawah dimensi metrik G adalah $(m-2)n$, dinotasikan sebagai Dim(G) $\geq (m-2)n$, dan batas atas dimensi metrik G adalah $(m-2)n$, dinotasikan sebagai Dim(G) $\leq (m-2)n$. Maka dapat disimpulkan bahwa dimensi metrik G adalah $(m-2)n$. ■

4 Simpulan

Berdasarkan penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa, dimensi metrik Amal(nK_m) dengan $n \geq 4$ dan $m \geq 4$, dinotasikan sebagai Dim(Amal(nK_m)) adalah $(m-2)n$.

5 Daftar Pustaka

[1] S. Allesina dan J. M. Levine, "A Competitive Network Theory of Species Diversity," *PNAS*, vol. 108, pp. 5638-5642, 4 February 2010.

[2] A. Benjamin, G. Chartrand and P. Zhang, The Fascinating World of Graph Theory, United Kingdom: Princeton University Press, 2015.

[3] R. Jiang, Y. H. Wu, W. X. Wang dan Q. S. Wu, "Urban Traffic from The Perspective of Dual Graph," *The European Physical Journal B*, pp. 127-133, May 2008.

[4] B. Baranidharan dan B. Shanthi, "A New Graph Theory based Routing Protocol for Wireless Sensor Networks," *International Journal on Applications of Graph Theory in Wireless Ad Hoc Networks and Sensor Networks*, vol. 3, no. 4, pp. 15-26, 2011.

[5] M. N. Shah, "Implementation of Graph Theory in Computer Networking to Find an Efficient Routing Algorithm," *International Journal of Innovative Research in Computer and Communication Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 12-20, 2016.

[6] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Jhnson dan O. R. Oellermann, "Resolvability in Graphs and The Metric Dimension of a Graph," *Discrete Applied Mathematics*, vol. 105, pp. 99-113, 2000.

[7] P. J. Slater, "Leaves of Trees," *Proc. 6th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing*, vol. 14, pp. 549-559, 1975.

[8] S. W. Saputro, R. Simanjuntak, S. Uttunggadewa, H. Assiyatun, E. T. Baskoro, A. N. M. Salman dan M. Baca, "The Metric Dimension of The Lexicographic Product of Graph," *Discrete Mathematics,* vol. 313, pp. 1045-1051, 2013.

[9] Rinurwati, Slamin dan H. Suprajitno, "On (Local) Metric Dimension of Graphs with m-Pendant Points," *International Conference on Mathematics Education, Theory and Application,* vol. 855, 2017.

[10] I. Tomescu dan M. Imran, "On Metric and Partition Dimensions of Some Infinite Regular Graphs," *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie* , no. 4, pp. 461-472, 2009.

[11] M. Ali, G. Ali, U. Ali dan M. T. Rahim, "On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension," *Open Journal of Discrete Mathematics,* vol. 2, pp. 21-23, 2012.

[12] S. Wahyudi, Sumarno dan Suharmadi, "Dimensi Metrik Pengembangan Graf Kincir Pola K1+mK3," *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications,* vol. 8, no. 2, pp. 17-22, 2011.